Die Bewegungsachsen gestützter starrer Körper

Dizioglu, Bekir

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 36, 1984, S.87-127

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Die Bewegungsachsen gestützter starrer Körper

Von **Bekir Dizioğlu** *), Wolfenbüttel

(Eingegangen am 7. 6. 1984)

Summary: The configuration of the instantaneous screw axes between rigid bodies are investigated. Many contact-point of surfaces are considered. The determination of the screw axis by the constraint guide body is given. The projective and kinematic geometry of the contact-point problems are reduced on the line-geometries. The work is especially important for the manifold of motion for the mechanical parts of the manipulators and robots.

Die Aufgabe, die Bewegungsachsen eines beliebig gestützten starren Körpers zu bestimmen, ist durch die Arbeiten von Mannheim, Somoff und Ball [1, 2, 3] als gelöst zu betrachten. Trotzdem wird man, wie ich hoffe, nachstehend eine Reihe neuer Definitionen und Sätze finden, die geeignet erscheinen, über die Frage weiteres Licht zu verbreiten. So dürfte der fundamentale Satz, daß jede Bewegung und jeder Kräftezustand zwei Achsen hat, mit allen seinen liniengeometrischen Folgerungen hier zum erstenmal auftreten. Auch die Untersuchung der Sonderformen, welche das in seiner allgemeinsten Gestalt bekannte Achsensystem für dreifache Stützung oder dreifachen Bewegungszwang annehmen kann, ist meines Wissens bisher noch nicht durchgeführt worden. Ich will versuchen, in dem Folgenden eine zusammenhängende Darstellung der synthetischen Konstruktion der Achsensysteme zu geben und dabei das Bekannte möglichst kurz zu fassen.

§ 1 Bewegungsachsen

Die Achse einer unendlich kleinen, also einer Schraubenbewegung, kann als diejenige Gerade definiert werden, welche bei der Bewegung ihre Lage nicht ändert. Ist ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die Achse und v die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung längs derselben, so gibt der Parameter v/ω das Steigungsverhältnis der in der Entfernung eins von der Achse befindlichen Punkte an; er ist positiv bei rechtsgängiger und negativ bei linksgängiger Schraubenbewegung, er ist null bei reiner Drehung und unendlich groß bei rein fortschreitender Bewegung.

Die fortschreitende Bewegung längs einer endlichen Achse ist gleichbedeutend mit einer Drehung um die unendlich ferne Gerade der zur Achse senkrechten Ebenen. Da

*) o. Prof. Dr. Bekir Dizioğlu, Direktor des Institutes für Getriebelehre und Maschinendynamik der Technischen Universität Braunschweig.

die unendlich ferne Gerade einer Ebene alle in der Ebene liegenden Richtungen in sich enthält, so kann auch umgekehrt jede Drehung oder fortschreitende Bewegung innerhalb einer Ebene aufgefaßt werden als eine Verschiebung längs der unendlich fernen Geraden jener Ebene. Auch die Drehung um eine zur Ebene senkrechte Achse, welche ja in der Ebene als eine Drehung um den Schnittpunkt der Achse erscheint, ist gleichzeitig eine fortschreitende Bewegung längs der unendlich fernen Geraden der Ebene; mithin ist die Schraubenbewegung um diese senkrechte Achse gleichzeitig eine Schraubenbewegung um die unendlich entfernte Gerade der Ebene, nur vertauschen alsdann die Einzelbewegungen ihren Charakter: die Drehung um die endliche ist eine fortschreitende Bewegung in Bezug auf die unendliche ferne, und die fortschreitende Bewegung in Bezug auf die endliche ist eine Drehung um die unendlich ferne Achse. Demnach hat jede Bewegung zwei Achsen, denn mit der endlichen ist eine unendlich ferne Achse bestimmt, welche die zugehörige unendlich ferne Achse heißen möge, und welche in den zur endlichen Achse senkrechten Ebenen liegt. Aus der Lage der unendlich fernen Achse dagegen kann man ohne weiteres die Lage der zugehörigen Achse nicht bestimmen, weil jeder Strahl der betreffenden Richtung, unter Umständen sogar wieder ein unendlich ferner Strahl, die Rolle übernehmen kann.

Die fortschreitende Bewegung in der Richtung einer endlichen Achse hat nicht nur zwei, sondern unendlich viel Achsen, da jede der Bewegungsrichtung parallele Gerade als Achse anzusehen ist. Um die unendlich ferne Gerade der hierzu senkrechten Ebenen findet eine reine Drehung statt. Die fortschreitende Bewegung, welche von *a* nach *b* erfolgen möge, kann beliebig aus zwei zueinander normalen Seitenbewegungen *ac* und *cb* zusammengesetzt gedacht werden. Legt man durch *a* eine Ebene senkrecht zu *bc*, so kann in Bezug auf die unendlich entfernte Gerade dieser Ebene die Bewegung *ac* als eine Längsverschiebung und Bewegung *cb* als eine Drehung, die Gesamtbewegung *ab* also als eine Schraubenbewegung angesehen werden. Von jeder anderen durch *a* gelegten Ebene läßt sich dasselbe nachweisen, und hieraus folgt, daß beim Vorhandensein einer rein fortschreitenden Bewegung nicht nur alle in die betreffende Richtung fallenden Geraden, sondern auch alle unendlich fernen Geraden als Bewegungsachsen zu gelten haben, und zwar erscheint in Bezug auf letztere die Bewegung im allgemeinen als eine Schraubenbewegung.

Noch anschaulicher werden diese Verhältnisse, wenn man die oben gegebene Definition der Bewegungsachsen als diejenigen Geraden, welche bei der betreffenden Bewegung ihre Lage nicht ändern, anwendet. Wird einem Körper eine Drehung um eine endliche Achse erteilt, so verändern alle seine Ebenen ihre Lage mit Ausnahme derjenigen, welche die Achse rechtwinklig schneiden. In den letztgenannten Ebenen ändern alle Geraden ihre Lage, nur nicht die gemeinsame unendlich ferne Gerade. Daraus folgt, daß einer endlichen Achse für Drehbewegungen stets eine und nur eine unendlich ferne Achse und zwar für fortschreitende Bewegung zugeordnet ist. Erfährt dagegen ein Körper eine Parallelverschiebung, so gelangen alle seine Ebenen in Lagen, welche zu der ersten Lage parallel sind, so daß die unendlich fernen Geraden aller Ebenen ihre Lage beibehalten. Die im Endlichen liegenden Geraden verschieben sich parallel mit sich selbst, und nur diejenigen, welche in die Bewegungsrichtung fallen, decken sich mit ihrer ersten Lage. Ist drittens die Bewegung eines Körpers schraubenförmig um eine endliche Achse, so entspricht dieser Achse, um welche ja auch eine Drehung stattfindet, wieder nur eine einzige zugehörige unendlich ferne Achse und zwar ebenfalls für schraubenförmige Bewegung. Als Kennzeichen dafür, ob in einer beliebigen Ebene die unendlich ferne Gerade eine Bewegungsachse ist, gilt demnach entweder das Vorhandensein irgendeiner rein fortschreitenden Bewegung oder, falls es eine solche nicht gibt, das Vorhandensein einer im Endlichen liegenden und zu der Ebene senkrecht gerichteten Bewegungsachse.

§ 2 **Auflagerkräfte**

Wird ein starrer Körper in einem seiner Punkte durch eine Fläche gestützt, so daß der betreffende Punkt in der Fläche gleitet, und zwar ohne Reibung, so wirkt in jedem Punkt auf den Körper infolge äußerer Kräfte ein Widerstand, eine sogenannte Auflagerkraft ein, deren Lage durch den Auflagerpunkt und durch die Richtung normal zur Auflagerfläche gegeben ist. Auch bei den in der Technik vorkommenden Stützungen kann die Lage der Auflagerkräfte im allgemeinen als bekannt vorausgesetzt werden. Durch solche Unterstützungen werden die Bewegungen eines Körpers einem Zwange unterworfen, und jede Auflagerkraft verringert im allgemeinen die Bewegungsmöglichkeit, indem sie diejenigen Bewegungen verhindert, bei denen sie eine negative Arbeit leisten müßte. Auf Bewegungen, bei welchen sie die Arbeit Null verrichtet, also auf das Gleiten längs einer gegebenen Lagerbahn, hat die Auflagerkraft keinen Einfluß, und die positive Arbeit kommt für sie, gemäß ihrer Natur als bloßer Widerstand, überhaupt nicht in Betracht.

Eine Auflagerkraft B habe von einer Achse A den kürzesten Abstand a und schließe mit ihr den Winkel α ein. Damit bei einer mit dem Parameter v/ω erfolgenden Bewegung um die Achse A die Auflagerkraft B keine Arbeit leiste, muß die bekannte Bedingung

$$a \cdot \operatorname{tg} \alpha = v/\omega$$

erfüllt sein. Dieselbe ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß die Bahn eines beliebigen Punktes der Kraftlinie normal zur letzteren gerichtet sei. Hat man n Auflager- $B_1B_2 \dots B_n$ und sucht man eine Achse A, deren kürzeste Abstände von den Kräften mit $a_1a_2 \dots a_n$ und deren Neigungswinkel zu den Kräften mit $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$ bezeichnet werden mögen, so gelten, wenn um diese Achse eine Bewegung ohne Arbeitsverrichtung der Kräfte möglich sein soll, für die Lage der Achse die n-1 Gleichungen

$$a_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = a_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = \dots a_n \cdot \operatorname{tg} \alpha_n.$$

Die Gesamtheit der Gerade, deren Wert $(a \cdot \operatorname{tg} \alpha)$ in Bezug auf eine bestimmte Achse derselbe ist, bildet einen linearen Strahlenkomplex, der durch diese Eigenschaft allein definiert werden kann, und jene Achse ist die Hauptsache des Komplexes. Demnach ist die Aufgabe, die Bewegungsachsen eines beliebig gestützten starren Körpers zu bestimmen, gleichbedeutend mit dem Aufsuchen der Hauptachsen aller linearen

Strahlkomplexe, die durch die gegebenen Auflagerkraftlinien hindurchgehen. Den so gewonnenen Achsen sind die zugehörigen unendlich fernen hinzuzufügen. Fünf Gerade im Raum bestimmen, allgemein gesprochen, einen linearen Komplex; vier Gerade bestimmen ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Klasse, welches die Basis eines ganzen Komplexbüschels ist; drei Gerade liegen in einer Regelschar, und diese ist der Durchschnitt der Träger eines Komplexbündels; die Gesamtheit endlich aller linearen Komplexe, welche durch zwei gegebene Gerade hindurchgehen, bildet ein Komplexgebüsch. Demnach haben wir bei fünf Auflagerkräfen einen Komplex, eine Bewegung, bei vier Auflagerkräften die Hauptachsen eines Komplexbüschels, bei drei Auflagerkräften die Hauptachsen eines Komplexbündels und bei zwei Auflagerkräften die Hauptachsen eines Komplexgebüsches.

Nach Ball sagt man, ein starrer Körper habe $n \leq 6$ Freiheitsgrade, wenn sich die zulässigen Bewegungsschrauben aus n linear unabhängigen Bewegungsschrauben $b^{(1)}, \ldots. b^{(n)}$ linear kombinieren lassen, also eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mu_1 b^{(1)} + \ldots. + \mu_n b^{(n)}$ bilden.

Die entsprechende Komplexmannigfaltigkeit der Schraubachsen ist nur (n-1) dimensional, da die Komplexkoordinaten homogen sind.

Die durch $r < 6$ linear unabhängige Geradenkomplexe $a^{(1)}, \ldots. a^{(r)}$ aufgespannte Komplexmannigfaltigkeit $a = \lambda_1 a^{(1)} + \ldots. + \lambda_r a^{(r)}$, wobei $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots. = \lambda_r = 0$ auszuschließen ist, nennt man in der Strahlengeometrie:

$r = 2$ Komplexbüschel, $r = 3$ Komplexbündel, $r = 4$ Komplexgebüsch, $r = 5$ Komplexwald. Für $r = 6$ ergibt sich die Gesamtheit aller Komplexe.

Man kann also auch sagen, ein starrer Körper besitzt n Freiheitsgrade $(1 \leq n \leq 6)$, wenn die mit seinen zulässigen Schraubungen verknüpften linearen Strahlenkomplexe eine lineare Mannigfaltigkeit (n-1)ter Stufe bilden [4].

§ 3 Einfache Stützung

Für einen einfach gestützten Körper, also etwa für eine Kugel auf einer Fläche, ist jede beliebige Gerade des Raumes die Achse einer Bewegung, bei welcher die Auflagerkraft keine Arbeit leistet. Mit der Lage der Achse sind die Größen a und α und somit der Parameter der Bewegung gegeben. Die Achsen mit einem bestimmten Parameter genügen in Bezug auf die Auflagerkraft der Bedingung

$$a \cdot \operatorname{tg} \alpha = \text{konstans}$$

und bilden daher einen linearen Komplex mit der Auflagerkraftlinie als Hauptachse. Die Gerade, welche die Kraftlinie schneiden, sind die Achsen für reine Drehung, die Geraden in den Ebenen normal zur Kraftrichtung sind die Achsen für fortschreitende Bewegung. Die Kongruenz aller Komplexe gleichen Parameters sind die Geraden, welche die Kraftlinie senkrecht schneiden; diese sind daher Achsen für jede beliebige Bewegung $(a \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0 \cdot \infty)$ (Bild 1).

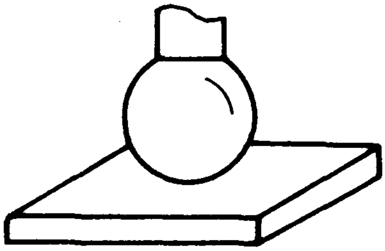

Bild 1:
Einfach gestützter Körper: Punktberührung zwischen einer Kugel und einer Ebene.

§ 4 **Das Zylindroid**

Ehe die Achsensysteme der mehrfach gestützten Körper behandelt werden, mag das Zylindroid, das für diese Systeme von hervorragender Bedeutung ist, eine kurze Besprechung erfahren. Das Zylindroid ist eine Regelfläche dritten Grades, und die erzeugende Regelschar dritter Ordnung läßt sich wie folgt ableiten.

Es sei der Punkt o die Projektion einer zur Zeichnungsebene senkrechten Geraden L[1]; man lege durch o einen beliebigen Kreis und zwei beliebige, den Kreis in a und b treffende Strahlen. Man betrachte die letzteren als die Projektionen zweier auf L sich schneidenden, der Bildebene parallelen Geraden, deren Abstand von der Bildebene proportional dem Abstande des Kreismittelpunktes m von der Sehne ab ist. Denkt man sich die Kreisschnittpunkte aller zu ab parallelen Sehnen mit o verbunden und jedes so gewonnene Strahlenpaar in einem Abstande von der Bildebene, der dem Abstande des Kreismittelpunktes von der betreffenden Sehne proportional ist, so bilden diese die Gerade L senkrecht schneidenden Strahlen die erzeugende Regelschar des Zylindroides. Der zu ab parallele Durchmesser cd hat von m den Abstand Null, und die aufeinander senkrechten Strahlen oc und od liegen somit in der Bildebene selbst. Sie sind die Hauptachsen, ihr Schnittpunkt o ist der Mittelpunkt, und die Ebene, also in diesem Fall die Ebene der Zeichnung, ist die Mittelebene des Zylindroides.

Eine parallele Sehne ef, welche auf der anderen Seite von m und in gleichem Abstande wie ab liegt, bestimmt zwei Strahlen oe und of (der Buchstabe o bezeichnet hier nicht mehr den Mittelpunkt, sondern allgemein einen Punkt auf L), welche von der Mittelebene ebenso weit abliegen wie oa und ob, aber auf entgegengesetzter Seite. Zwei Strahlen wie oa und oc oder wie ob und of, die auf entgegengesetzten Seiten der Mittelachse in gleichem Abstand von letzterer und zu den Hauptachsen symmetrisch liegen, will ich zwei zugeordnete oder sich entsprechende Strahlen des Zylindroides nennen. Alle Paare zugeordneter Strahlen bilden ebenso wie in der Projektion auch auf dem Zylindroide eine Involution [4]. Die nicht zugeordneten Strahlen, welche auf entgegengesetzten Seiten der Mittelebene in gleichem Abstand von ihr liegen, schließen

[1]) Der Leser wird ersucht, sich die Zeichnung selbst zu machen.

stets einen rechten Winkel miteinander ein. Die Hauptachsen sind offenbar sich selbst zugeordnet.

Die parallelen Sehnen in den Endpunkten des zu ab normalen Kreisdurchmessers gh berühren den Kreis in diesen Punkten, und die beiden Strahlen des Zylindroids fallen je in einen einzigen og oder oh zusammen, die mit den Hauptachsen Winkel von 45° einschließen. Diese Zylindroidstrahlen haben den größten Abstand von der Mittelachse, sie schneiden die Gerade L, die Doppelgerade oder Leitgerade des Zylindroides, in zwei Kuspidalpunkten, und die durch die parallel zur Mittelachse geführten Ebenen sind zwei Kuspidalebenen. Auch gehen durch sie normal zur Mittelachse zwei Symmetrieebenen des Zylindroides.

Durch ein Paar zugeordneter Strahlen ist das Zylindroid vollständig bestimmt. Sind beispielsweise die zugeordneten Strahlen ob und of gegeben, so zeichnet man in der Mittelebene den beliebigen, durch o gehenden Kreis obf, zieht den Strahl oa normal zu of und hat damit die Richtung der parallel sich verschiebenden Sehne ab gewonnen. Da ferner durch den halben kürzesten Abstand der gegebenen Geraden und durch den Abstand des Kreismittelpunktes von der Sehne ab das Verhältnis der Strahlenabstände von der Mittelebene gegeben ist, so ist das Zylindroid völlig bestimmt. Nennt man den Winkel, den zwei zugeordnete Geraden miteinander bilden, und ihren kürzesten Abstand p, ferner den Abstand der beiden Kuspidalpunkte e, so gilt die aus der angegebenen Konstruktion leicht abzuleitende Gleichung.

$$\frac{p}{\sin\phi} = e.$$

Der Kreis kann als die Projektion eines zur Mittelebene senkrechten Kreiszylinders angesehen werden. Denkt man sich die parallelen Sehnen ab nicht in der Mittelebene selbst, sondern jedesmal in der Höhe des zugehörigen Strahlenpaares, so erfüllen sie da ihr Abstand von der Mittelebene linear wächst, eine die Mittelebene in der Geraden cd schneidenden Ebene Σ. Der Schnitt von Σ mit dem Kreiszylinder ist eine ebenfalls in dem Kreis projizierte Ellipse, welche die Schnittpunkte der parallelen Sehnen mit den zugehörigen Strahlenpaaren enthält, welche also auch den Durchschnitt der Ebene Σ mit dem Zylindroid darstellt. cd ist die kleine Achse der Ellipse. Die durch o parallel zu ab gelegte Sehne oi bestimmt zwei Zylindroidstrahlen, von denen der eine den Kreiszylinder in o berührt und der andere mit oi zusammenfällt. Die Ebene Σ schneidet also das Zylindroid außer in einer Ellipse noch in einem Strahl oi, sie ist eine Berührebene des Zylindroids, und i ist der Berührungspunkt. Da der Kreis ganz beliebig angenommen war, haben wir die Sätze:

Jeder gerade, die Leitgerade als Seite enthaltende Kreiszylinder schneidet das Zylindroid in einer Ellipse; ferner: Jede Berührebene hat mit dem Zylindroid außer einer Erzeugenden eine Ellipse gemein, deren senkrechte Projektion auf die Mittelebene ein durch den Zylindroid-Mittelpunkt gehender Kreis ist.

Der dem Strahl oi zugeordnete ok auf der anderen Seite der Mittelebene erscheint in der Projektion als Kreisdurchmesser, k sei der Punkt, in welchem jener Strahl den Kreiszylinder trifft, also ein Punkt der Ebene Σ. Jeder von k ausgehende, in Σ liegende

Strahl trifft einen Strahl des Zylindroids auf dem Kreiszylinder, also unter rechtem Winkel, denn die Projektion des Winkels ist ein rechter, und der eine Schenkel, nämlich der Strahl des Zylindroids, ist der Projektionsebene parallel. Man kann k als einen beliebigen Punkt des Zylindroids erfassen, dann ist die Ebene Σ bestimmt durch k und durch den Strahl oi, welcher dem den Punkt k enthaltenden zugeordnet ist. Daraus folgt: Die von irgend einem Punkte des Zylindroids auf dessen Erzeugenden gefällten Lote liegen in einer Ebene und bilden einen gewöhnlichen Strahlenbüschel. Die Ebene des Büschels ist eine Berührebene des Zylindroids.

Offenbar hat auch jeder Kegel, dessen Scheitel in dem von k auf die Mittelebene gefällten Lote liegt und der durch die Schnittellipse der Ebene Σ hindurchgeht, die Eigenschaft, daß jede seiner Seiten einen Strahl des Zylindroids rechtwinklig schneidet.

Da die Erzeugenden des Zylindroids sowohl die Strahlen des Büschels k in Σ, als auch die Leit- oder Doppelgerade L unter rechtem Winkel treffen, so ist das Zylindroid der Ort der gemeinsamen Lote zwischen der Geraden L und den Strahlen des Büschels k in Σ. Auch bei beliebiger Lage einer Geraden L und eines Strahlenbüschels k ist der Ort der gemeinsamen Lote ein Zylindroid. Fällt man von k ein Lot auf L und errichtet man weiter in dem Punkt, in dem L die Ebene Σ des Büschels trifft, ein zweites Lot auf L so, daß es in Σ liegt, und betrachtet man diese Lote als die zugeordneten Strahlen eines Zylindroids, so liegt k auf einem Strahl des letzteren und die Ebene Σ geht durch den zugeordneten Strahl, der Büschel k hat also die erforderliche Lage, in der seine Strahlen von denen des Zylindroids senkrecht getroffen werden, und L ist die Doppelgerade des letzteren.

Man kann allgemein sagen: Das Zylindroid ist der Ort der gemeinsamen Lote zwischen einem beliebigen Strahl einer Regelschar zweiter Ordnung und allen übrigen Strahlen derselben Schar. Der Beweis wird sich weiter unten selbst ergeben. Zerfällt die Regelschar in zwei einfache Büschel mit einem gemeinsamen Strahl, so hat man den eben besprochenen Fall.

Die zylindroidische Regelschar wird von einem auf ihr liegenden Punkt, wie jede Regelschar dritter Ordnung, durch ein Ebenenbüschel zweiter Ordnung projiziert. Ist k jener Punkt, so gehört sowohl die Ebene Σ, welche den Strahl oi projiziert, als auch die durch k parallel zur Mittelachse gelegte Ebene T, welche den zu oi rechtwinkligen Strahl projiziert, zu dem Ebenenbüschel. Eine beliebige Ebene des Büschels, welche den Strahl of projiziert, schneidet Σ in dem Strahl kf und T in dem zu of parallelen, also zu kf normalen Strahl ka. Die Strahlenbüschel k in Σ und T sind demnach durch das Ebenenbüschel in der Weise projektiv aufeinander bezogen, daß die homologen Strahlen rechte Winkel miteinander einschließen, und man kann das Ebenenbüschel aus zwei konzentrischen projektiven Strahlenbüscheln konstruieren, wenn man die normalen Strahlen einander zuweist. Der von dem Ebenenbüschel umhüllte Kegel ist von der besonderen Art, daß seine Fokalachsen auf zwei der Ebenen, nämlich auf den Ebenen der beiden konzentrischen Strahlenbüschel, senkrecht stehen. Man erhält ihn auch dadurch, daß man in dem Brennpunkt einer Parabel auf deren Ebene ein Lot errichtet und die Parabel aus einem Punkte des Lotes projiziert. Das Lot ist eine

Fokalachse, und die Ebene durch den Scheitel parallel zur Parabelebene enthält dann ein Strahlenbündel. Also:

Die Ebenenbüschel zweiter Ordnung, durch welche eine zylindroidische Regelschar auf den auf ihr liegenden Punkten projiziert wird, umhüllen Kegel, deren Fokalachsen auf zwei der Ebenen senkrecht stehen. Ich will diese besondere Art Ebenenbüschel und Kegel zweiter Ordnung aus diesem Grunde zylindroidische Ebenenbüschel oder Kegel nennen.

Des weiteren ergibt sich der Satz: Der Ort der gemeinsamen Lote zwischen einer beliebigen Geraden und den Strahlen eines Zylindroids ist ebenfalls ein Zylindroid. Legt man senkrecht zu der gegebenen Geraden, die L heißen möge, eine Ebene Σ, welche einen Strahl des Zylindroids enthält, was immer möglich ist, so gibt es in Σ, wie wir wissen, ein einfaches Strahlenbündel, dessen Mittelpunkt k mit dem Durchgang des zugeordneten Strahls zusammenfällt, und dessen Geraden die Strahlen des Zylindroids senkrecht schneiden. In dem Ebenenbüschel zweiter Ordnung Γ, welcher die Strahlen des Zylindroids aus dem Punkt k projiziert, enthält eine beliebige Ebene einen Strahl des Zylindroids und einen dazu senkrechten Strahl des Büschels k; eine Parallele zu dem letztgenannten Strahl und durch den Schnittpunkt der Ebene mit L trifft auch diese Gerade unter rechtem Winkel, da ja alle Strahlen des Büschels k normal zu L liegen, und ist somit ein gemeinsames Lot zwischen L und einer Erzeugenden des Zylindroids. Zieht man demnach in allen Ebenen des Büschels Γ durch ihre Schnittpunkte mit L Parallelen zu den in ihnen enthaltenen Geraden des Strahlen-
k parallel zur Mittelachse des Zylindroids gelegt wird, hat mit dem Ebenenbüschel Γ, wie oben gezeigt, ein Strahlenbüschel gemein, dessen Geraden den Strahlen des Zylin-
wie oben gezeigt, ein Strahlenbüschel gemein, dessen Geraden den Strahlen des Zylin-
droids parallel sind und daher von den gefundenen gemeinsamen Loten ebenfalls rechtwinklig geschnitten werden. Man kann also die gemeinsame Lote auch auffassen als die Geraden der kürzesten Entfernung zwischen L und den Strahlen des Büschels k in T, mithin erzeugen sie ein Zylindroid.

§ 5 Zweifache Stützung bei allgemeiner Lage der Auflagerkräfte

Bei Vorhandensein von zwei Auflagerkräften B_1 und B_2 müssen die Bewegungsachsen die Bedingung

$$a_1 \cdot \mathrm{tg}\, \alpha_1 = a_2 \cdot \mathrm{tg}\, \alpha_2$$

erfüllen. Sie bilden einen quadratischen Strahlenkomplex und bestehen aus allen Geraden, welche die Erzeugenden eines Zylindroids senkrecht schneiden. Das Zylindroid enthält die beiden Auflagerkraftlinien als zugeordnete Geraden und ist dadurch völlig bestimmt. Da es zur Bestimmung der Form des Zylindroids gleichgültig ist, welches Paar zugeordneter Strahlen man wählt, so kann man sagen: das Zylindroid besteht aus allen Paaren windschiefer Kräfte, die zu demselben Achsenkomplex führen. Allerdings sind die Achsenparameter für die einzelnen windschiefen Paare verschieden, aber die geometrische Form der Achsenkomplexe ist immer dieselbe.

Die Achsen mit einem bestimmten Parameter bilden, weil sie in Bezug auf B_1 allein und in Bezug auf B_2 allein je einem linearen Komplex angehören, die Kongruenz dieser beiden Komplexe, also ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Klasse, oder, wie Sturm es kürzer nennt, ein Strahlennetz. Die beiden Treffgeraden jedes solchen Strahlennetzes für einen bestimmten Parameter sind zwei zugeordnete (reelle oder imaginäre) Strahlen des Zylindroids. Für das Strahlennetz der reinen Drehachsen sind die beiden Kraftlinien die Treffgeraden, für die Achsen der fortschreitenden Bewegung sind es zwei unendlich ferne imaginäre Strahlen durch den unendlich fernen Punkt der Zylindroid-Doppelgeraden, denn alle durch jenen Punkt gehenden oder unendlich fern liegenden Strahlen sind Achsen für die fortschreitende Bewegung, die in der Richtung der Zylindroid-Doppelgeraden möglich ist. Die Zylindroid-Doppelgerade (die Gerade der kürzesten Entfernung zwischen den Kraftlinien) und die unendlich ferne Gerade der Zylindroid-Mittelebene gehören allen Strahlennetzen gleichen Parameters an; sie sind die beiden Achsen, in Bezug auf welche jede beliebige Bewegung möglich ist, gleichzeitig sind sie die Doppelstrahlen des quadratischen Achsenkomplexes im Plückerschen Sinne.

Die Achsen einer bestimmten Richtung bilden ein Parallelstrahlenbüschel, desdessen Ebene durch diejenige Erzeugende des Zylindroids hindurchgeht, die mit der betreffenden Richtung einen rechten Winkel einschließt. Wir legen durch einen Punkt k des Zylindroids und durch den zugeordneten Strahl eine Ebene Σ, dann trifft jeder Strahl des Büschels k in Σ einen Zylindroidstrahl unter rechtem Winkel. Eine Ebene, welche einen beliebigen Zylindroidstrahl von k aus projiziert, enthält einen Strahl des Büschels k, der, weil er normal zu dem Zylindroidstrahl gerichtet ist, dem parallelen Achsenbüschel einer Ebene angehört. In dem Ebenenbüschel zweiter Ordnung Γ, durch welchen die Zylindroidstrahlen von k aus projiziert werden, liegen demnach alle zur Ebene Σ parallelen Achsen, und jede zu Σ parallele Ebene schneidet aus dem Ebenenbüschel Γ einen Achsenbüschel zweiter Ordnung heraus. Gemäß der in § 4 erörterten besonderen Eigenschaft des Ebenenbüschels Γ ergeben sich hieraus die Sätze:

Die Bewegungsachsen in parallelen Ebenen umhüllen, wenn auf eine der Ebenen senkrecht projiziert, ähnlich liegende und konfokale Parabeln. Sie sind die zu einer Fokalachse senkrechten Schnitte desselben Ebenenbüschels zweiter Ordnung, durch welchen die Zylindroidstrahlen aus einem ihrer Punkte projiziert werden. Der Mittelpunkt des Ebenenbüschels ist der Träger desjenigen einfachen Büschels von Bewegungsachsen, der alle Richtungen der parallelen Ebenen enthält.

Der von dem Ebenenbüschel umhüllte Kegel ist offenbar eine Plückersche Komplexfläche.

Durch einen beliebigen Punkt des Raumes geht ein Achsenkegel, der, wie in § 4 gezeigt wurde, das Zylindroid in einer Ellipse schneidet, und die Projektion der Ellipse auf die Mittelebene ist stets ein durch den Zylindroid-Mittelpunkt gehender Kreis.

Die unendlich ferne Ebene ist eine Ausnahmeebene, in der jeder Strahl zu den Achsen gehört, und ebenso ist der unendlich ferne Punkt in der Richtung der Zylindroid-Doppelgeraden ein Ausnahmepunkt. Sie bilden gemeinsam mit den Zylindroiden die Singularitätenfläche des Komplexes. Unter den singulären Ebenen und

Punkten haben die beiden Kuspidalebenen und Kuspidalpunkte des Zylindroids eine besondere Bedeutung. In ihnen fallen die beiden einfachen Achsenbüschel, deren Träger jede singuläre Ebene und jeder singuläre Punkt ist, je in einen einzigen zusammen.

§ 6 Zweifache Stützung bei sich schneidenden Auflagerkräften

Haben die beiden Auflagerkräfte im Endlichen einen Punkt gemeinsam (Bild 2), so wird das Zylindroid zu einem einfachen Strahlenbüschel, dessen Ebene mit der Kraftebene und dessen Mittelpunkt mit dem Kräfteschnittpunkt zusammenfällt, und der quadratische Komplex der Bewegungsachsen besteht auf allen Geraden, welche die Strahlen jenes Büschels senkrecht treffen. Dieser Komplex ist seiner Form nach immer derselbe und kann mit jedem anderen Komplex für zwei im Endlichen sich schneidende Auflagerkräfte zur Deckung gebracht werden. Die Kraftebene ist zu einer zweiten Ausnahmeebene geworden, denn alle in ihr liegenden Geraden sind Achsen für reine Drehung, welche beide Kraftlinien treffen. Aus demselben Grunde ist der Kräfteschnittpunkt zu einem zweiten Ausnahmepunkt geworden. Zwei weitere Ausnahmeebenen sind imaginär und schneiden sich in dem gemeinsamen Lot der Kraftlinien, also ist der Komplex ein tetraedaler.

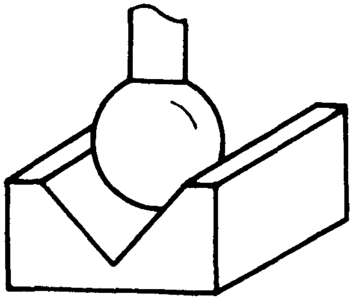

Bild 2:
Zweifache Stützung bei sich schneidenden Auflagerkräften.

Das durch die Kraftlinien bestimmte Strahlenbüschel, das kurz Kraftlinienbüschel heißen und dessen Mittelpunkt mit o bezeichnet werden möge, treffe eine beliebige Ebene Σ in einer Geraden Σ, und die senkrechte Projektion von o auf Σ sei der Punkt o'. Dann ist jede in Σ liegende Gerade, die einen Strahl des Büschels o' auf der Geraden Σ' unter rechtem Winkel schneidet, eine Bewegungsachse, denn sie trifft auch den Strahl des Kraftlinienbüschels senkrecht, der in dem Strahl des Büschels o' projiziert ist. Demnach umhüllen die Achsen in Σ eine Parabel mit dem Brennpunkt o' und der Scheiteltangente Σ'. In einer zu Σ parallelen Ebene verschiebt sich die Scheiteltangente Σ parallel mit sich selbst, während sich der Brennpunkt nicht verändert. Also lautet der Satz über die Achsen paralleler Ebenen in der Anwendung auf den vorliegenden Fall:

Die Bewegungsachsen in parallelen Ebenen umhüllen ähnlich liegende und konfokale Parabeln, deren Brennpunkt in der senkrechten Projektion des Kräfteschnittpunktes und deren Scheiteltangenten in den Schnittlinien der Kraftebene gegeben sind. Sie sind die zu einer Fokalachse senkrechten Schnitte desselben zylindroidischen Ebenenbüschels, dessen Mittelpunkt im Kräfteschnittpunkt liegt.

Der Achsenkegel durch einen beliebigen Punkt q des Raumes schneidet die Kraftebene in einem Kreis, in welchem der Kräfteschnittpunkt o und der Fußpunkt q′ des von q auf die Kraftebene gefällten Lotes die Endpunkte desselben Durchmessers sind, denn jene von q nach einem Kreispunkt gerichtete Gerade trifft einen Strahl des Kraftlinienbüschels o unter rechtem Winkel. Die Achsenkegel sind daher, nach Schröters Bezeichnung, orthogonale, daß heißt ihre zyklischen Ebenen stehen zu zwei Kegelstrahlen (qq′ und qo) senkrecht.

Auch hier stellt der Kraftlinienbüschel die Gesamtheit der sich schneidenden Kräftepaare dar, die zu demselben Achsenkomplex führen. Während aber bei windschiefer Lage der Kräfte einem Strahl des Zylindroides immer nur ein einziger zugeordnet ist, entspricht in dem Büschel irgend einem Strahl jeder beliebige zweite.

Sind die beiden Auflagerkräfte parallel, so wird aus dem Kraftlinienbüschel ein Parallelbüschel, und der quadratische Achsenkomplex zerfällt in zwei spezielle lineare oder, wie Sturm sie nennt [4], in zwei Strahlengebüsche. Nämlich alle Geraden in den zur Kraftrichtung senkrechten Ebenen schneiden die Strahlen des Kraftlinienbüschels senkrecht; sie sind die Achsen für fortschreitende Bewegung und bilden das eine Strahlengebüsch. Dazu kommen alle Geraden, welche den unendlich fernen Strahl des Kraftlinienbüschels treffen – der Zusatz „senkrecht“ verliert hier seine Bedeutung – als zweites Strahlengebüsch, denn diese Geraden sind der Kraftebene parallel, sie haben also von beiden Kräften denselben Abstand $a_1 = a_2$ und wegen der gleichen Richtung der Kräfte auch denselben Neigungswinkel $\alpha_1 = \alpha_2$, so daß die Fundamentalgleichung $a_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = a_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2$ für alle diese Geraden erfüllt ist (Bild 3).

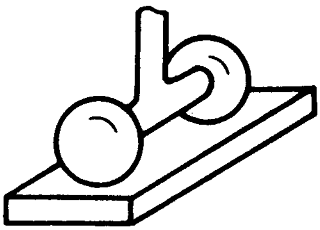

Bild 3:
Zweipunktberührung mit parallelen Auflagerkräften.

§ 7 **Allgemeines über dreifache Stützung**

Beim Vorhandensein von drei Auflagerkräften $B_1B_2B_3$ müssen die Bewegungsachsen der Bedingung

$$a_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = a_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = a_3 \cdot \operatorname{tg} \alpha_3$$

Genüge leisten. Wir bilden die quadratischen Achsenkomplexe für Gruppen von je zwei der Kräfte, beispielsweise für $B_1 B_2$ und für $B_1 B_3$, und erhalten das Achsensystem für alle drei Kräfte als Kongruenz dieser Komplexe.

In einer beliebigen Ebene umhüllen die Achsen für $B_1 B_2$ eine Parabel und die Achsen für $B_1 B_3$ eine zweite Parabel. Ein gemeinsamer Strahl dieser beiden Büschel ist der im Durchgang von B_1 normal zu dieser Kraftlinie gerichtete. Sein Parameter in Bezug auf B_1 kann jeden Wert annehmen ($a_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot 0 \cdot \infty$), die Parameter in Bezug auf B_2 und B_3 dagegen sind im allgemeinen voneinander verschieden, so daß dieser Strahl keine Achse für alle drei Kräfte abgibt. Jeder andere gemeinsame Strahl der beiden Achsenbüschel hat mit Bezug auf B_1 einen von $0 \cdot \infty$ verschiedenen, das heißt bestimmten Parameter, der den Parametern für B_2 und B_3 gleich sein muß, da der Strahl beiden Büscheln angehört, er ist also eine Bewegungsachse für alle drei Kräfte. Solcher gemeinsamen Strahlen gibt es, wenn die beiden Büschel nicht ganz und gar zusammenfallen, bekanntlich nur drei, so daß in einer beliebigen Ebene nicht mehr als drei Bewegungsachsen liegen.

Ähnlich kann man den Beweis führen, daß durch einen beliebigen Punkt des Raumes nicht mehr als drei Bewegungsachsen hindurchgehen. Da für den allgemeinen Fall, daß die drei Kräfte weder durch denselben Punkt gehen, noch derselben Ebene parallel sind, wie im einzelnen gezeigt werden soll, eine weitere Vereinfachung des Systems nicht eintritt, so ergibt sich der Satz:

Die Bewegungsachsen eines dreifach gestützten Körpers bilden im allgemeinen ein Strahlensystem dritter Ordnung und dritter Klasse.

Eine fortschreitende Bewegung ist im allgemeinen nicht möglich. Dieselbe erfolgt bei zwei Kräften in der Richtung des gemeinsamen Lotes und muß bei drei Kräften verschwinden, sobald die gemeinsamen Lote von je zwei Kraftlinien nicht dieselbe Richtung haben, sobald also die drei Kräfte nicht derselben Ebene parallel sind. Es gibt demnach auch keinen unendlich fernen Ausnahmepunkt.

Die Achsen mit einem bestimmten Parameter liegen für jede Auflagerkraft in einem linearen Komplex, sie bilden daher den Durchschnitt von drei solchen Komplexen, das heißt eine Regelschar zweiter Ordnung. Die Regelschar der reinen Drehachsen wird durch die drei Kraftlinien als Leitstrahlen bestimmt.

Sind die drei Auflagerkräfte $B_1 B_2 B_3$ nicht derselben Ebene parallel, so haben die Zylindroide, die durch je zwei der Kraftlinien als zugeordnete Geraden gegeben sind, Mittelebenen, welche ebenfalls nicht parallel sein können. Irgend eine Achse muß einen Strahl jedes dieser Zylindroide senkrecht schneiden. Einer beliebigen Ebene Σ und ein Strahl des Zylindroids $B_1 B_2$ und ein solcher des Zylindroids $B_1 B_3$ parallel, und diese Strahlen sind untereinander nicht parallel, ihr gemeinsames Lot ist also die einzige zu Σ senkrechte Bewegungsachse. Wenn die Ebene Σ die Richtung des zu beiden Zylindroiden gehörenden Strahles B_1 enthält, kann man das Zylindroid $B_1 B_3$ ersetzen, so daß B_1 nicht mehr gemeinsamer Strahl ist, und man erkennt die Gültigkeit des Gesetzes auch für diesen Fall. Wir haben also den Satz:

Sind die drei Auflagerkräfte nicht derselben Ebene parallel, so gibt es von jeder Richtung des Raumes eine und nur eine im Endlichen liegende Bewegungsachse.

Jeder endlichen Achse ist eine unendlich ferne zugeordnet, so daß die unendlich ferne Ebene wieder eine Ausnahmeebene ist, in der jeder Strahl zu dem Achsensystem gehört. Dies gilt auch, wenn die Auflagerkräfte derselben Ebene parallel sind, weil ja dann eine fortschreitende Bewegung eintreten kann. Das Achsensystem dritter Ordnung und dritter Klasse besteht aus einem solchen dritter Ordnung und zweiter Klasse der endlichen Bewegungsachsen und aus einem System nullter Ordnung erster Klasse der zugehörigen unendlich fernen Achse.

Verfolgen die drei Auflagerkräfte die Richtungen derselben Ebene, so sind dieser auch die Mittelebenen der Zylindroide $B_1 B_2$, $B_1 B_3$ und $B_2 B_3$ parallel. Das gemeinsame Lot zwischen irgend einem Strahl des Zylindroids $B_1 B_2$ und einem zu ihm windschiefen Strahl des Zylindroids $B_1 B_3$ (oder $B_2 B_3$) steht normal auf jenen Ebenen, und die Gesamtheit dieser Lote sind die Achsen für fortschreitende Bewegung. Zwischen einem Strahl des Zylindroids $B_1 B_2$ und dem Parallelen des Zylindroids $B_1 B_3$ bilden die gemeinsamen Lote einen Parallelbüschel, so daß außer den Achsen für fortschreitende Bewegung noch eine einfach unendliche Zahl von Parallel-Achsenbüscheln vorhanden ist, deren jeder offenbar eine Achse für reine Drehung enthalten muß, da diese ja andere Richtungen als die Achsen für fortschreitende Bewegung, nämlich die Richtungen der Leitebene für die parabolische Drehachsenschar verfolgen. Daraus ergibt sich der Satz:

Bei drei derselben Ebene parallelen Auflagerkräften sind in dem Achsensystem außer den zu dieser Ebene senkrechten Achsen für fortschreitende Bewegung im Endlichen nur noch die Richtungen einer Ebene vertreten, der Leitebene für die Drehachsenschar, und in jeder dieser Richtungen ist ein Parallelbüschel von Achsen vorhanden.

Der Satz gibt sofort Aufschluß über die Klasse des Achsensystems. Eine beliebige Ebene des Raumes hat mit der Leitebene der Drehachsen nur eine einzige Richtung gemeinsam und schneidet den betreffenden Parallelbüschel in einer Achse dieser Richtung. In einer beliebigen Ebene liegt daher außer der unendlich fernen nur eine einzige Bewegungsachse, und wir können sagen:

Für drei derselben Ebene parallele Auflagerkräfte ist das Strahlensystem der Bewegungsachsen von der zweiten Klasse.

In dem Achsensystem für drei Auflagerkräfte, dies gilt allgemein, sind alle Zylindroide enthalten, die durch irgend zwei Strahlen der Drehachsenschar als zugeordnete Geraden bestimmt sind. Jeder Ebene durch den Mittelpunkt einer hyperbolischen Drehachsenschar sind zwei (reelle, zusammenfallende, imaginäre) Strahlen der Drehachsenschar parallel, die zu beiden Seiten in gleichem Abstande von jener Ebene liegen. Das Achsensystem enthält also eine zweifach unendliche Schar von Zylindroiden, deren Mittelebenen sämtlich durch den Mittelpunkt des Drehachsen-Hyperboloids hindurchgehen. Auch wenn die der Mittelebene parallelen Drehachsen imaginär sind, ist das Zylindroid reell, da es ja für alle Richtungen des Raumes, also auch für die Richtungen der angenommenen Mittelebene, Bewegungsachsen gibt.

In der zweiten Erzeugungsschar des Drehachsen-Hyperboloids, in welcher die Kraftlinien liegen und die deshalb die Kraftlinienschar genannt werden möge, können irgendwelche drei Strahlen als die gegebenen Kraftlinien gewählt werden, ohne daß sich an dem Bewegungszwang etwas ändert. Das gemeinsame Lot von zwei Kraftlinien ist in Bezug auf diese beiden Kräfte eine Achse für beliebige Bewegung, also auch für diejenige bestimmte Bewegung, bei der die Arbeit der dritten Kraft zu Null wird, das heißt, es ist eine Achse für alle drei Kräfte. Hat man umgekehrt eine Bewegungsachse, und liegen zwei von drei Kraftlinien zu der Achse normal, so muß die Achse die beiden Kraftlinien offenbar schneiden, denn sonst wäre sie für dieselben nur eine Achse der fortschreitenden Bewegung, was sie für die dritte Kraft im allgemeinen nicht ist. Da nun jeder Ebene zwei Strahlen der hyperbolischen Kraftlinienschar parallel sind, die als die gegebenen Kraftlinien angesehen werden können, so muß die zu der Ebene senkrechte Achse die beiden Kraftlinien schneiden – auch wenn sie imaginär sind.

Die imaginären Strahlen einer gewöhnlichen Regelschar sind imaginäre Gerade der zweiten Art, welche weder durch einen reellen Punkt gehen noch in einer reellen Ebene liegen, während imaginäre Gerade der ersten Art, beispielsweise die Tangenten an einen Kegelschnitt von einem Punkt innerhalb desselben, stets einen reellen Punkt besitzen und einer reellen Ebene angehören. Wie aus dem Vorhandensein der oben erwähnten Bewegungsachse hervorgeht, haben zwei konjugiert imaginäre Gerade der zweiten Art ein reelles gemeinsames Lot und sind natürlich einer reellen Ebene, welche zu dem Lot normal liegt, parallel. Wir können demnach die folgende Definition aufstellen:

Das System der Bewegungsachsen bei dreifacher Stützung besteht aus den gemeinsamen Loten, welche zwischen irgend zwei Strahlen der Kraftlinien-Regelschar, die imaginären mit eingeschlossen, möglich sind.

Ähnlich erhält man für die gemeinsamen Lote von irgend zwei Strahlen eines Kegels zweiter Ordnung den Strahlenbüschel im Kegelscheitel, und man erkennt, daß sowohl beim Kegel wie bei der hyperboloidischen Regelschar jede Richtung des Raumes durch ein solches Lot vertreten sein muß. Es ist nun auch die in § 4 ausgesprochene Behauptung bewiesen, daß der Ort der gemeinsamen Lote zwischen einem beliebigen Strahl einer Regelschar zweiter Ordnung und den übrigen Strahlen derselben Schar ein Zylindroid ist, denn diese Lote sind der Ebene, die zu dem beliebig angenommenen Strahl normal liegt, parallel und bilden als die zu einer Ebene parallelen Bewegungsachsen eines dreifach gestützten Körpers ein Zylindroid. Der Satz von den gemeinsamen Loten bei dreifacher Stützung oder dreifachem Bewegungszwang gilt ganz allgemein und führt auch zu den unendlich fernen Achsen, wenn man bei diesen von der Richtungsbestimmung, die in dem Begriff „Lot" liegt, absieht.

§ 8 Drei Auflagerkräfte in derselben Ebene oder durch denselben Punkt

Wir betrachten nunmehr die einzelnen Formen, welche das Achsensystem bei dreifacher Stützung oder dreifachem Bewegungszwang annehmen kann, und beginnen mit den beiden einfachsten Fällen, daß die Auflagerkräfte in derselben Ebene liegen oder durch denselben Punkt gehen.

Sind beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt, und bildet man die Achsenkomplexe für je zwei der Kräfte, die ja jeder durch einen einfachen, die beiden Kräfte enthaltenden Strahlenbüschel bestimmt sind, so decken sich die Büschel und die Komplexe vollständig (auch bezüglich der Parameter), und wir erhalten die Bestätigung des bekannten Satzes, daß eine Auflagerkraft, welche mit zwei anderen gleichzeitig in derselben Ebene liegt und durch denselben Punkt geht, eine neue Bedingung für die Festlegung des Körpers nicht liefert.

Drei Auflagerkräfte in einer Ebene

Liegen die drei Kräfte in derselben Ebene, ohne durch denselben Punkt zu gehen, so sind außer den Geraden der unendlich fernen Ebene auch alle in der Kraftebene liegenden Geraden Bewegungsachsen, und zwar Achsen für reine Drehung, da sie die drei Kraftlinien schneiden. Irgendeine nicht in dieser Ebene liegende Achse möge dieselbe im Punkt d treffen. Denkt man sich die Komplexe, beziehungsweise die sie bestimmenden Strahlenbüschel für je zwei der Kräfte, so liegt d auf einem Strahl jedes dieser Büschel, und die Achse kann, weil sie mit diesen drei Strahlen rechte Winkel einschließen muß, nur normal zur Kraftebene gerichtet sein. Auch wenn man das Strahlenfeld der Kraftebene als die gegebene Kraftlinienschar und die Bewegungsachsen als die gemeinsamen Lote für irgend zwei Strahlen dieser Schar betrachtet, ergibt sich dasselbe, daß nämlich im Endlichen alle außerhalb der Kraftebene liegenden Achsen senkrecht auf ihr stehen und den Bündel eines unendlich fernen Punktes erfüllen. Demnach stellt sich die Gesamtheit der Achsen, bestehend aus zwei Strahlenfeldern und einem Strahlenbündel, als ein Strahlensystem erster Ordnung und zweier Klasse dar.

Die zur Kraftebene senkrechten Achsen sind die Achsen für die fortschreitende Bewegung, welche in dieser Richtung möglich ist, und welche auch als eine Drehung um die unendlich ferne Gerade der Kraftebene aufgefaßt werden kann. Da durch drei in einer Ebene liegende Auflagerkräfte diese Ebene in sich unverschieblich geworden ist, so erhält man den Satz der Mechanik: Ein Körper, der innerhalb einer Ebene festgelegt ist, kann nur noch reine Drehungen um Achsen ausführen, die in dieser Ebene liegen.

Ein bemerkenswerter Sonderfall ist der, daß die drei Auflagerkräfte in die unendlich ferne Ebene rücken. Bekanntlich bedeutet eine unendlich ferne, gleichzeitig unendlich kleine Kraft das, was man sonst auch ein Kräftepaar oder Kraftmoment nennt. Ein Körper, auf den drei unendlich ferne Auflagerkräfte einwirken, ist derart unterstützt, daß er in drei nicht dieselbe Richtung enthaltenden Ebenen Drehungen zu machen verhindert wird. In solchem Fall sind alle unendlich fernen Geraden Achsen für reine Drehung und somit alle im Endlichen liegenden Geraden Achsen für fortschreitende Bewegung. Aus den zur Kraftebene senkrechten Achsen für fortschreitende Bewegung wird die Gesamtheit aller endlichen Strahlen, so daß überhaupt jede beliebige Gerade zu dem Achsensystem gehört.

Drei Auflagerkräfte durch einen Punkt

Gehen die drei Kräfte durch denselben Punkt, ohne in derselben Ebene zu liegen, so kann der Punkt nach keiner Richtung des Raumes mehr ausweichen (Bild 4, 5). Alle durch ihn hindurchgehenden Strahlen sind Achsen für reine Drehung, da sie alle drei Kräfte treffen. Die drei von den Kraftlinien bestimmten Ebenen sind gleichzeitig die Ebenen der Strahlenbüschel, welche den Komplexen für je zwei der Kräfte zugrundeliegen. Irgend eine im Endlichen vorhandene Gerade, welche nicht durch den gemeinsamen Punkt der drei Kräfte hindurchgeht, trifft die Ebenen in mehr als einem Punkt, trifft also auch die Strahlen mehrerer Büschel und kann niemals, da diese Strahlen sich selbst im Endlichen schneiden, mit jedem gleichzeitig einen rechten Winkel einschließen; die beliebig angenommene Gerade kann also niemals eine Bewegungsachse für alle drei Kräfte sein. Dies deckt sich mit dem Gesetz über die Richtung der Bewegungsachsen, und auch die Definition der Achsen als der gemeinsamen Lote für irgend zwei Strahlen der Kraftlinienschar, das heißt des Strahlenbündels im Kräfteschnittpunkt, ergibt dasselbe. Damit ist der bekannte Satz der Mechanik, der dem für die Ebene angegebenen reziprok ist, bewiesen, daß die Bewegungen eines Körpers um einen festen Punkt stets reine Drehungen um Achsen sind, welche durch diesen Punkt hindurchgehen. Die Gesamtheit der Bewegungsachsen, bestehend aus einem Strahlenbündel und dem unendlich fernen Strahlenfeld, bildet ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Klasse.

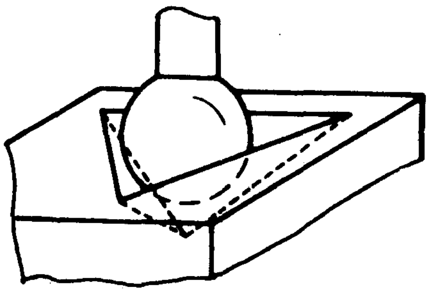

Bild 4:
Drei Auflagerkräfte durch einen endlich gelegenen Punkt.

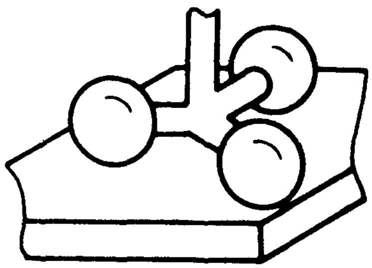

Bild 5:
Drei Auflagerkräfte, die parallel zueinander sind.

Rückt der Kräfteschnittpunkt ins Unendliche, so sind alle zur Kraftrichtung parallelen Geraden Drehachsen. Den unendlich fernen Geraden dieses Bündels, also einem unendlich fernen Büschel, sind als endliche Achsen für rein fortschreitende Bewegung alle Geraden zugeordnet, welche in den zur Kraftrichtung normalen Ebenen liegen. Das Achsensystem besteht demnach aus einem Strahlengebüsch (nach Sturms Bezeichnung) und aus dem Strahlenbündel im unendlich fernen Kräfteschnittpunkt. – In diesem Fall der Unterstützung befindet sich jeder Körper, der mit drei oder mit mehr als drei Punkten auf einer horizontalen Ebene ruht.

§ 9 Das Achsensystem zweiter Ordnung und zweiter Klasse

Sind die drei Auflagerkräfte derselben Ebene parallel, so müssen wir zwei besondere Fälle unterscheiden, in denen die Achsensysteme abweichende Formen annehmen: wenn die drei Kraftlinien dieselbe Gerade senkrecht schneiden und wenn dies nicht eintritt. Wir betrachten zunächst den ersten Fall.

Die Kräfte B_1 und B_2 mögen in einer Ebene Σ_1 liegen. Das Lot L_1, welches in ihrem Schnittpunkt o auf Σ_1 errichtet ist, wird von B_3 senkrecht getroffen und bestimme mit B_3 eine Ebene Σ_2. Da B_1 und B_2 aus dem Strahlenbüschel o in Σ_1 beliebig gewählt werden können, legen wir B_1 parallel zu B_3 und bestimmen nunmehr die Kongruenz der Achsenkomplexe $B_1 B_3$ und $B_1 B_2$. Von den Achsen für fortschreitende Bewegung in Bezug auf $B_1 B_3$, welche ja die Ebenen senkrecht zu B_3 erfüllen, bleiben nur diejenigen übrig, die auf Σ_1 senkrecht stehen. Von den der Ebene $B_1 B_3$ parallelen Achsen, deren Projektionen auf Σ_1 sämtlich parallel zu B_3 sind, bleiben nur diejenigen, welche einen Strahl des Büschels $B_1 B_2$ senkrecht schneiden, das sind alle Geraden, welche den zu B_3 normalen Strahl des Büschels, der L_2 heißen möge, unter rechtem Winkel treffen. Demnach besteht die Gesamtheit der Achsen aus dem unendlich fernen Strahlenfeld, aus einem Strahlenbündel mit unendlich fernem Mittelpunkt in der Richtung L_1 und aus den Geraden, welche L_2 senkrecht schneiden. Es ist ein System zweiter Ordnung und zweiter Klasse, welches aus zwei Systemen erster Ordnung und erster Klasse zusammengesetzt ist. Die Kraftlinienschar wird durch das Büschel o in Σ_1 und durch das zu B_3 parallele Büschel in Σ_2, die Drehachsenschar durch das Büschel o in Σ_2 und durch das zu B_3 parallele Büschel in Σ_1 dargestellt.

Haben die drei Kräfte, welche L_1 senkrecht schneiden, eine allgemeinere Lage, so daß keine zwei in einer Ebene liegen, so ist nichtsdestoweniger das Achsensystem der Form nach genau dasselbe, und nur die Parameter wechseln. Die Kraftlinien bestimmen ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid, und alle Strahlen der Kraftlinienschar treffen L_1 unter rechtem Winkel. Ebenso schneiden alle Drehachsen eine Gerade L_2 senkrecht, welche der Kraftlinienschar angehört. Die Leitebenen Σ_1 und Σ_2 der beiden Scharen stehen ebenfalls normal aufeinander. Daß nun wieder neben den unendlich fernen Strahlen die Geraden normal zu Σ_1 und die Geraden, die L_2 senkrecht treffen, Bewegungsachsen sind, erkennt man vielleicht am ehesten mit Hilfe des Satzes von den gemeinsamen Loten. Die Kraftlinien, zu denen auch die unendlich ferne Gerade von Σ_2 gehört, werden auf Σ_1 durch ein einfaches Strahlenbündel projiziert.

Jede auf Σ_1 senkrecht stehende Gerade ist daher gemeinsames Lot zwischen einer endlichen und der unendlich fernen Kraftlinie. Jede Gerade, welche L_2 unter rechtem Winkel trifft, ist gemeinsames Lot zwischen dieser und der unendlich fernen Kraftlinie. Da ferner jeder Ebene ein Strahl der Kraftlinienschar parallel ist, so schneidet die unendlich ferne Gerade jeder Ebene diesen Strahl und die unendlich ferne Kraftlinie. Demnach gilt allgemein: wenn drei Auflagerkräfte dieselbe Gerade senkrecht schneiden, so bilden die Bewegungsachsen ein seiner Form nach unveränderliches Strahlensystem zweiter Ordnung und zweiter Klasse, welches aus zwei Systemen erster Ordnung erster Klasse zusammengesetzt ist.

Die beiden Geraden L_1 und L_2 seien unmittelbar gegeben; sie treffen sich ebenfalls rechtwinklig in o. Ist dann A eine beliebige Achse, welche L_2 in dem Punkt a unter rechtem Winkel schneidet, so beschreibt ein Strahl B, der an L_1 und A entlanggleitet und dabei fortwährend normal zu L_1 gerichtet ist, ein gleichseitiges Paraboloid, und irgend drei Lagen von B können als gegebene Kraftlinien angesehen werden, welche das Achsensystem bestimmen. Denkt man sich statt der Achse A eine andere gegeben, welche demselben zu L_2 senkrechten Büschel a angehört, so beschreibt B ein anderes gleichseitiges Paraboloid, und auch hier können drei beliebige Lagen von B die gegebenen Kraftlinien vorstellen, welche zu demselben Achsensystem führen, nur mit anderen Parametern. Dreht sich der Strahl A um a in der zu L_2 senkrechten Ebene, so erhält man als Gesamtheit aller Lagen B die sämtlichen Strahlen, welche L_1 rechtwinklig schneiden. Diese Strahlen können als die Gesamtheit der Kraftlinien-Regelscharen angesehen werden, für welche sich dasselbe Achsensystem, abgesehen vom Parameter, ergibt, und die Strahlen, welche L_2 senkrecht treffen, bilden die Summe der Leitscharen hierzu. Die letzteren sind die Regelscharen, welche nach § 7 von den Achsen gleichen Parameters gebildet werden.

Auch erkennt man die Symmetrie zwischen den Kraftlinien und den Beugungsachsen.

§ 10 Das Achsensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse

Sind die drei Auflagerkräfte derselben Ebene parallel, ohne dieselbe Gerade senkrecht zu schneiden, liegen vorerst B_1 und B_2 in einer Ebene Σ_1, und bestimmt ihr Schnittpunkt o mit B_3 eine Ebene Σ_2, so können B_1 und B_2 aus dem Büschel o in Σ_1 wieder beliebig gewählt und daher B_1 parallel zu B_3 angenommen werden. In der Kongruenz der Achsenkomplexe B_1B_2 und B_1B_3 bleiben von den Achsen für fortschreitende Bewegung nur diejenigen normal zu Σ_1. Zu einer der Achsen des Komplexes B_1B_3, welche der Ebene Σ_2 parallel sind, ziehen wir durch o eine Parallele A. Diese fällt in die Ebene Σ_2, trifft B_3 und ist daher eine Drehachse. Ist ferner B derjenige Strahl des Büschels o in Σ_1, der zu A normal liegt, so enthält die durch A und B bestimmte Ebene alle Achsen der Richtung A für die drei Kräfte, denn in ihr treffen alle zu A parallelen Strahlen die Gerade B senkrecht.

Die Ebenen der parallelen Achsen schneiden also aus den beiden konzentrischen Strahlenbüscheln o in Σ_1 und Σ_2 die aufeinander senkrechten Strahlen heraus, das heißt, sie bilden ein zylindroidisches Ebenenbüschel, zu dem auch Σ_1 und Σ_2 gehören. Da jedes Büschel paralleler Achsen eine Drehachse enthält, so sind nunmehr unter Hinzurechnung der unendlich fernen Geraden alle Bewegungsachsen bestimmt.

Durch einen beliebigen Punkt des Raumes lassen sich zwei den zylindroidischen Kegel berührenden Ebenen legen, es gehen also durch diesen Punkt zwei je einer Drehachse parallele Bewegungsachsen und außerdem eine zu Σ_1 normale Achse für fortschreitende Bewegung. Das System ist von der dritten Ordnung. Die Klasse des Systems – dieses Gesetz gilt ja allgemein, wenn drei Auflagerkräfte die Richtungen einer Ebene verfolgen – ist die zweite.

Wenn die Ebene Σ_2 mit der Kraftlinie B_3 mehr und mehr in die Ebene Σ_1 hineingedreht wird, so wird das zylindroidische Ebenenbüschel und der umhüllte Kegel immer flacher und fällt in dem Augenblick, wo B_3 die Ebene Σ_1 erreicht, mit dieser zusammen. Alsdann liegen alle Punkte des Raumes, die nicht der Ebene Σ_1 angehören, innerhalb des Kegels, somit werden für jeden dieser Punkte zwei Achsen imaginär, und man sieht ein, warum das Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse in diesem Fall auf ein solches erster Ordnung und zweiter Klasse zurückgeführt wird.

Das Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse zerfällt geometrisch in ein solches erster Ordnung und erster Klasse, bestehend aus dem unendlich fernen Strahlenfeld und dem Strahlenbündel der Achsen für fortschreitende Bewegung, und in ein solches zweiter Ordnung erster Klasse. Das letztere kann man ansehen als die Gesamtheit der Strahlen, welche den zylindroidischen Kegel berühren und gleichzeitig eine Tangente desselben, die unendlich ferne Gerade der Ebene Σ_2, schneiden.

Neben den singulären Ebenen der parallelen Achsen sind besonders die zu Σ_2 parallelen Ebenen hervorzuheben, denn die Schnitte dieser Ebenen mit denen des zylindroidischen Büschels bestehen offenbar sämtlich aus Achsen, so daß hier wieder von den Achsen ähnlich liegende und konfokale Parabeln umhüllt werden.

In dem allgemeineren Fall, wenn sich keine zwei der Kraftlinien schneiden, liegen die Kraftlinienschar und die Drehachsenschar auf einem hyperbolischen Paraboloide, das aber kein gleichseitiges mehr ist, das heißt, die Leitebene Σ_1 und Σ_2 stehen nicht senkrecht aufeinander.

Die Projektionen der Kraftlinien, zu denen auch die unendlich ferne Gerade von Σ_2 gehört, auf Σ_1 umhüllen eine Parabel, so daß jede Gerade normal zu Σ_1 als gemeinsames Lot für zwei endliche Kraftlinien anzusehen ist. Jede Drehachse, also jede Richtung der Ebene Σ_2, kann nur mit einer Kraftlinie, mit einer Richtung der Ebene Σ_1 einen rechten Winkel einschließen. Demnach sind die noch vorhandenen Büschel paralleler Achsen, deren jeder eine Drehachse enthält, bestimmt durch jene Drehachse und die dazu senkrechte endliche Kraftlinie, und jedes solcher Büschel ist anzusehen als Gesamtheit der gemeinsamen Lote zwischen der betreffenden endlichen und der unendlich fernen Kraftlinie. Also: Die Ebenen der parallelen Achsen berühren das Kraftlinien-Paraboloid in Punkten, in denen sich die Erzeugenden beider Scharen rechtwinklig schneiden. Man kann die beiden Erzeugungsscharen eines Paraboloids projektiv aufeinander beziehen, indem man die sich senkrecht treffenden Strahlen einander zuweist, denn jede Schar liegt perspektiv zu einem einfachen Strahlenbüschel, dessen Strahlen denen der Schar parallel sind, und zwei solche Strahlenbüschel sind projektiv, wenn die senkrechten Strahlen einander entsprechen. Führt man durch drei Punkte des Paraboloids, in denen ein solches rechtwinkliges Schneiden stattfindet, eine Ebene, so kann man die Schnittkurve dieser Ebene auffassen als perspektiv sowohl zu der einen wie auch zu der anderen Schar. Man erhält so zwei konjektive (ineinander liegende projektive) Kurven zweiter Ordnung, und da dieselben die drei erst gegebenen Punkte entsprechend gemein haben, so haben sie alle Punkte entsprechend gemein, das heißt, in allen Punkten der Kurve schneiden sich die Erzeugenden beider Scharen unter rechtem Winkel, und die Kurve enthält alle Punkte dieser Art.

Da das Paraboloid zwei Symmetrieebenen besitzt, so entsprechen einem Punkt der gesuchten Kurve aus Symmetriegründen drei andere, welche mit dem ersten in einer zur Hauptachse senkrechten Ebene liegen. Damit ist die Richtung der Kurvenebene bestimmt, und wir können sagen:

Die Strahlen beider Regelscharen eines hyperbolischen Paraboloids treffen sich paarweise rechtwinklig in einer Hyperbel, deren Ebene normal zur Hauptachse des Paraboloids gerichtet ist.

Die Ebenen der parallelen Bewegungsachsen berühren das Kraftlinien-Paraboloid in den Punkten dieser Hyperbel und bilden daher einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung, dessen Mittelpunkt, der Pol der Hyberbelebene, auf der Hauptachse des Paraboloids liegt, so daß sein Abstand von der Hyperbelebene durch den Paraboloid-Scheitel halbiert wird, denn er ist durch letzteren und durch den unendlich fernen Punkt der Hauptachse von seiner Polaren harmonisch getrennt.

Legt man die beiden Leitebenen Σ_1 und Σ_2 durch die Paraboloid-Hauptachse, so gehören sie ebenfalls dem Büschel singulärer Ebenen an, denn sie berühren das Paraboloid in den unendlich fernen Punkten der Hyperbel. Sie werden von dem Ebenenbüschel in zwei konzentrischen Strahlenbüscheln geschnitten, und da die Strahlen der letzteren den Kraftlinien bzw. den Drehachsen parallel sind, so schneiden die Ebenen des Ebenenbüschels aus den beiden Strahlenbüscheln die zueinander senkrechten Strahlen heraus, das heißt, das Ebenenbüschel und der umhüllte Kegel ist wieder ein zylindroidischer. Demnach ist das System der Bewegungsachsen, wenn man von den Parametern absieht, ganz dasselbe wie in dem erst besprochenen einfacheren Fall, wo zwei der Auflagerkräfte sich schnitten. Auch die unendlich fernen Achsen gehören dazu, weil jede derselben durch eine endliche und durch die unendlich ferne Kraftlinie hindurchgeht. Wir haben daher den Satz:

Wenn drei Auflagerkräfte derselben Ebene parallel sind, nicht aber derselben Ebene angehören und nicht dieselbe Gerade senkrecht schneiden, so bilden die Bewegungsachsen ein Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse, das aus einem solchen erster Ordnung und erster Klasse und aus einem System zweiter Ordnung und erster Klasse zusammengesetzt ist.

Das System der Bewegungsachsen ist augenscheinlich seiner Form nach bestimmt, sobald der Flächenwinkel der beiden Leitebenen gegeben ist. Wird dieser Winkel zu einem rechten, so ist nicht mehr jedem Strahl der einen Regelschar ein ihn rechtwinklig schneidender der zweiten Schar zugeordnet, sondern die Strahlen jeder Schar treffen ein und denselben Strahl der anderen Schar senkrecht. Die Hyperbel zerfällt in diese beiden aufeinander lotrechten Geraden, nämlich in die beiden Erzeugenden, welche durch den Paraboloidscheitel gehen, und das Ebenenbüschel zweiter Ordnung zerfällt in zwei Ebenenbüschel erster Ordnung, von denen das eine die Drehachsen und das andere die Kraftlinien enthält, so daß für die Bewegungsachsen nur ein einfaches Ebenenbüschel übrig bleibt und die Ordnung des Systems sich von der dritten auf die zweite vermindert.

Wir nehmen die Hauptachse H des Paraboloids und den zylindroidischen Kegel, dessen Mittelpunkt m auf H liegt, als gegeben an. Dann sind auch die beiden durch H geführten Leitebenen Σ_1 und Σ_2 bestimmt, da sie den Kegel berühren. Der Punkt s auf H sei der Scheitel des Paraboloids. Die beiden Erzeugenden E_1 und E_2, welche durch s hindurchgehen, erhält man als die beiden in den Leitebenen liegenden Lote, die in s auf H errichtet werden können. Eine zu H normale Ebene, deren Abstand von m durch s halbiert wird, schneidet den Kegel in einer Hyperbel. Läßt man jetzt die Gerade E_1 an E_2 und an der Hyperbel entlanggleiten, während sie zu Σ_1 parallel bleibt, so ergibt sich die Kraftlinien-Regelschar, und ähnlich bekommt man die Drehachsenschar durch Gleiten von E_2 längs der Geraden E_1 und der Hyperbel bei paralleler Lage zu Σ_2.

Verrückt man den Paraboloidscheitel s auf der Hauptachse und damit die Anfangslagen von E_1 und E_2, so verschiebt sich auch die Hyperbelebene entsprechend, denn ihr Abstand von m ist gleich 2sm. Man erhält also auf dem Kegel eine neue Hyperbel und kann dann wieder mit E_1 in der angegebenen Weise eine von der ersten abweichende Kraftlinien-Regelschar konstruieren, für welche offenbar dasselbe System der Bewegungsachsen, soweit der Parameter nicht in Frage kommt, gültig ist, da ja dieses nur von dem Kegel und von den Leitebenen abhängt. Die Leitschar stellt wieder die Drehachsen dar.

Wir wissen nun, daß in einer Ebene Σ_3 parallel zu Σ_2 die Achsen eine Parabel umhüllen, in welcher Σ_3 den Kegel schneidet. Der Strahl, in dem der Kegel von Σ_1 berührt wird, trifft die Parabel im Scheitel t, und die Scheiteltangente der Parabel ist die Schnittlinien von Σ_3 und Σ_1. Die Gerade E_1 in ihrer Anfangslage trifft die Scheiteltangente der Parabel in einem Punkt u, der ebensoweit von t liegt, wie s von m. Die zweite durch u gehende Parabeltangente uv ist der in Σ_3 liegende Strahl der zweiten Schar. Der Berührungspunkt v ist gleichzeitig der Punkt, in welchem dieser Strahl die Hyperbel schneidet, denn v liegt, in der Richtung der Paraboloid-Hauptachse gemessen, in dem Abstande $2ut = 2sm$ von t. Bewegt sich der Scheitel s des Paraboloids auf der Hauptachse, so bewegt sich in Σ_3 der Punkt u auf der Scheiteltangente der Parabel, und die Achse uv beschreibt den ganzen, die Parabel umhüllenden Strahlenbüschel. Das Achsensystem enthält also eine einfach unendliche Zahl paraboloidischer Regelscharen – es sind das die Regelscharen gleicher Parameter –, und die Leitscharen hierzu sind die sämtlichen Kraftlinien-Regelscharen, welche zu derselben Form des Achsensystems führen.

Eine etwas abweichende Form nimmt das Achsensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse für den Fall an, daß zwei Auflagerkräfte (B_1, B_2) unter sich und die dritte B_3 zu ihrer Ebene parallel sind. Irgendeine mit der Ebene $B_1 B_2$ parallele Ebene Σ trifft die Zylindroide, die von der dritten Kraftlinie mit jeder der beiden anderen bestimmt werden, in je zwei sich schneidenden Strahlen C_1 und D_1, C_2 und D_2, die paarweise parallel sein müssen, da die Zylindroide der Form und Lage nach gleich und nur in der Richtung B_3 parallel verschoben sind. Die beiden in Σ liegenden Büschel paralleler Achsen, welche je einen Strahl des einen Zylindroids senkrecht treffen, schneiden daher auch je einen Strahl des anderen Zylindroids unter rechtem Winkel, so daß sämtliche Parallelbüschel von Achsen, welche die Richtungen der Ebene $B_1 B_2$ verfolgen und für die Kräfte B_1 und B_3 allein gelten, auch für alle drei Kräfte maßgebend sind. Der Scheitel des zylindroidischen Ebenenbüschels liegt unendlich fern in der Mittelebene des Zylindroids $B_1 B_3$. Zu den genannten Achsen kommen noch diejenigen in der Richtung der fortschreitenden Bewegung und das unendlich ferne Strahlenlenfeld.

§ 11 Das Achsensystem dritter Ordnung und dritter Klasse

In ähnlicher Weise, wie hier gezeigt wurde, habe ich auch für den allgemeinsten Fall, daß die drei Kraftlinien weder durch denselben Punkt gehen, noch derselben Ebene parallel sind, das sich dann ergebende Achsensystem dritter Ordnung und dritter Klasse, als dessen Vereinfachungen die bisher betrachteten Systeme anzusehen sind, rein synthetisch und als Kongruenz der Achsenkomplexe für je zwei der Kräfte abgeleitet. Da aber gerade dieses allgemeine System in den älteren Arbeiten analytisch sehr eingehend behandelt wurde, nur die unendlich fernen Achsen hat man bisher nicht berücksichtigt, so verzichte ich auf eine Wiedergabe meiner Herleitung und begnüge mich, im Anschluß an § 7 des Zusammenhangs wegen noch einige, wohl durchweg bekannte, Ergebnisse anzuführen.

Wir konstruieren die durch die drei Kraftlinien hindurchgehende hyperboloidische Regelschar, die Kraftlinienschar, und ebenso die zweite, sie schneidende Schar, die Drehachsenschar. Da das Achsensystem in jeder Richtung des Raumes einen Strahl und in jeder Ebenenrichtung ein Zylindroid enthält, das durch die beiden, der Ebene parallelen, Drehachsen als zugeordnete Geraden bestimmt ist, so gelangen wir zu allen Strahlen des Systems, wenn wir die Zylindroide konstruieren, deren Mittelebenen irgendein einfaches Ebenenbüschel bilden. Eine beliebige Ebene schneidet das zu ihr parallele Zylindroid in zwei endlichen und in der unendlich fernen Geraden, das System ist also von der dritten Klasse. Eine Ebene, welche durch die Doppelgerade eines Zylindroids gelegt wird, schneidet aus dem letzteren nur einen Strahl heraus, so daß die zweite in der Ebene liegende endliche Achse dem Zylindroid nicht angehört. Durch den Punkt, wo diese zweite Achse die Zylindroid-Doppelgerade trifft, gehen noch zwei Strahlen des Zylindroids, also ist das System von der dritten Ordnung.

Ganz ebenso wie das Achsensystem erzeugen wir mit Hilfe der Zylindroide, welche je zwei Kraftlinien als zugeordnete Strahlen enthalten, ein zweites System dritter Ordnung und dritter Klasse, das der Kraftlinien. Die beiden Systeme liegen symmetrisch zu dem Mittelpunkt des Kraftlinien-Hyperboloids, so daß jede Ebene, welche einen Strahl des einen und den dazu parallelen Strahl des anderen Systems enthält, durch den Mittelpunkt geht und der Mittelpunkt den Abstand der beiden Geraden halbiert. Die drei Hauptachsen des Hyperboloids gehören beiden Systemen an und sind im Endlichen die einzigen Strahlen dieser Art. Jeder Strahl des einen Systems schneidet aus dem anderen ein Zylindroid und eine gewöhnliche Regelschar heraus, so daß man jedes System definieren kann sowohl als die Doppelgeraden der Zylindroide des anderen Systems, wie auch als die Leitscharen der in dem anderen System enthaltenen Regelscharen. Ebenso wie die Achsen die gemeinsamen Lote sind für irgend zwei Strahlen der Kraftlinien-Regelschar, so sind auch die Geraden des Kraftliniensystems die gemeinsamen Lote für irgend zwei Strahlen der Drehachsenschar.

Die erwähnten, in dem Achsensystem enthaltenen Regelscharen sind die Regelscharen der gleichen Parameter, und die Leitscharen dazu bilden die Gesamtheit der Kraftlinien-Regelscharen, die zu demselben Achsensystem führen, nur mit anderen Parametern. Alle Hyperboloide, auf denen jene Regelscharen liegen, haben den Mittelpunkt, die drei Hauptachsen und die Ebenen der Kreisschnitte gemeinsam.

Die Hauptachse des Kraftlinien-Hyperboloids, auf der von letzterem das längere Stück abgetrennt wird, wollen wir die erste Hauptachse nennen. Die beiden sie schneidenden Drehachsen bestimmen ein Zylindroid mit jener Hauptachse als Doppelgerade. Da auch die anderen Regelscharen gleichen Parameters mit diesem Zylindroid je zwei zugeordnete Gerade gemeinsam haben, so erhalten wir auf diese Weise ein einfaches Mittel, jene Regelscharen zu konstruieren. Wir legen durch die Hauptachse eine Ebene Σ_1, welche das Kraftlinien-Hyperboloid in einem Kreise schneidet. Irgend zwei zugeordnete Strahlen des erwähnten Zylindroids mögen die Hauptachse, also auch Σ_1 in a und b treffen. Dann ist die Regelschar durch die beiden zugeordneten Geraden und durch den Kreis mit dem Durchmesser ab, den sie mit der Ebene Σ_1 gemeinsam hat, genau bestimmt. Der Durchmesser des größten dieser Kreise ist gleich dem Abstande der am weitesten auseinanderliegenden Strahlen des Zylindroids.

Von den zugeordneten Geraden fällt ein Paar ganz in die beiden Ebenen der Hauptkreisschnitte Σ_1 und Σ_2. Die zugehörige Regelschar zerfällt in zwei einfache Strahlenbüschel, deren Mittelpunkt die Schnittpunkte der zugeordneten Geraden mit der Hauptachse und deren Ebenen die Ebenen Σ_1 und Σ_2 sind. Die entsprechende Kraftlinien-Regelschar besteht aus zwei Strahlenbüscheln mit denselben Mittelpunkten und mit den Ebenen Σ_2 und Σ_1. Das Achsensystem hat also im Endlichen zwei singuläre Ebenen und zwei singuläre Punkte. Jede dieser Ebenen enthält einen Strahlenbüschel und einen davon verschiedenen (unendlich fernen) Strahl. Jeder der Punkte ist ebenfalls Träger eines einfachen Büschels und eines davon verschiedenen Strahles. Liegt nämlich der Achsenbüschel des betreffenden Punktes in Σ_1, so geht durch denselben Punkt in Σ_2 ein Kraftlinienbüschel, und das in dem Punkt auf Σ_2 errichtete Lot ist ebenfalls eine Achse als gemeinsames Lot für zwei (bzw. unendlich viel) Kraftlinien. Weitere (reelle) singuläre Ebenen und singuläre Punkte sind im Endlichen nicht vorhanden.

Die Brennfläche, anscheinend von der sechsten Ordnung und vierten Klasse, ist beiden Systemen gemeinsam. Sie hat daher mit den Hyperboloiden der Systeme den Mittelpunkt und die drei Symmetrieebenen gemeinsam. Die Ebenen Σ_1 und Σ_2 der Hauptkreisschnitte treffen die Brennfläche je in zwei konzentrischen Kreisen, von denen der äußere, der oben erwähnte größte Hyperboloid-Kreisschnitt eine Schnittkurve und der innere, durch die beiden singulären Punkte gehende, eine Berührkurve ist. Die beiden singulären Punkte sind zwei konische Knotenpunkte der Fläche.

Die für drei Auflagerkräfte gefundenen Systeme lassen sich, wenn man von dem Auftreten unendlich ferner Kräfte im allgemeinen absieht (§ 8), wie folgt zusammenstellen:

1) Die drei Kräfte gehen nicht durch denselben Punkt und sind nicht derselben Ebene parallel – Strahlensystem dritter Ordnung und dritter Klasse;
2) die drei Kräfte sind derselben Ebene parallel – Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse;
3) die drei Kräfte schneiden dieselbe Gerade senkrecht – Strahlensystem zweiter Ordnung und zweiter Klasse;
4) die drei Kräfte liegen in derselben Ebene – Strahlensystem erster Ordnung und zweiter Klasse;
5) die drei Kräfte gehen durch denselben Punkt – Strahlensystem erster Ordnung und erster Klasse (Bild 4, 5).

§ 12 Stützung durch vier und mehr als vier Auflagerkräfte

Sind vier Auflagerkräfte $B_1B_2B_3B_4$ gegeben, so müssen die Bewegungsachsen den drei Gleichungen

$$a_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = a_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = a_3 \cdot \operatorname{tg} \alpha_3 = a_4 \cdot \operatorname{tg} \alpha_4$$

Genüge leisten, sie bilden also, da jede Achse durch vier Konstanten bestimmt ist und somit noch eine Konstante zur Verfügung steht, eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit, eine Regelfläche. Aus der gewöhnlichen Regelschar, die durch die drei Kraftlinien $B_2B_3B_4$ hindurchgeht, kann man zwei der Kräfte, etwa B_2 und B_3, so wählen, daß sie einer durch B_1 gelegten Ebene parallel sind. Man kann demnach stets annehmen, daß von vier Auflagerkräften drei die Richtungen derselben Ebene verfolgen; das Achsensystem in Bezug auf diese drei Kräfte enthält nur die Richtungen einer Ebene (§ 7), also müssen auch die Achsen für vier Kräfte einer Ebene parallel sein: sie bilden, soweit sie im Endlichen liegen, ein Zylindroid. Diesem zugeordnet ist ein unendlich ferner, einfacher Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt in der Richtung der Zylindroid-Doppelgeraden liegt.

Die Achsen gleichen Parameters ergeben sich als der Durchschnitt von vier linearen Komplexen, das heißt, für jeden Parameter gibt es zwei (reelle, zusammenfallende oder imaginäre) Achsen, und diese sind stets zwei zugeordnete Strahlen des Zylindroids. Das Zylindroid selbst ist durch diejenigen beiden Geraden, welche von allen vier Kraftlinien getroffen werden, als zugeordnete Strahlen (Achsen mit dem Parameter Null) bestimmt, und es ist stets dasselbe, auch bezüglich der Parameter, für irgend vier Kraftlinien aus dem Strahlennetz, das durch die vier ursprünglich gegebenen Kraftlinien hindurchgeht.

Nimmt man zwei zugeordnete Geraden des Zylindroids als die Schnittlinien eines Strahlennetzes, so ergibt sich auch für vier Kraftlinien aus diesem dasselbe Zylindroid der Bewegungsachsen, nur mit anderen Parametern. Die Gesamtheit der Strahlennetze, welche durch irgend zwei zugeordnete Geraden des Zylindroids hindurchgehen, ist der in § 5 behandelte quadratische Strahlenkomplex, so daß hier der umgekehrte Fall vorliegt wie dort. Während bei zwei Auflagerkräften der quadratische Komplex die Bewegungsachsen enthält und das Zylindroid aus allen Gruppen von zwei Kraftlinien besteht, die zu derselben Form des Achsenkomplexes führen, bildet bei vier Auflagerkräften das Zylindroid das Achsensystem, und der quadratische Komplex enthält alle Strahlennetze, aus denen je vier oder mehr Kraftlinien dasselbe Zylindroid der Bewegungsachsen, nur mit anderen Parametern, ergeben.

Sind die Schnittlinien des Strahlennetzes imaginär (imaginäre Gerade der zweiten Art), so ist doch die Mittelebene des Zylindroids ihnen parallel, und dessen Doppelgerade ist ihr gemeinsames Lot. Die Mittelebene geht durch die Mittelpunkte der vier Hyperboloide, welche durch je drei der Kraftlinien gegeben sind, und ist damit vollständig festgelegt. Daraus ergibt sich der geometrische Satz:

Die Mittelpunkte aller in einem Strahlennetz enthaltenen Regelscharen zweiter Ordnung liegen in einer Ebene, der Mittelebene des Netzes.

Die zweiten Erzeugungsscharen aller paraboloidischen Regelscharen des Strahlennetzes sind ebenso wie dessen Schnittlinien der Mittelebene parallel. Das gemeinsame Lot der Schnittlinien, das stets reell ist, auch wenn die Schnittlinien imaginär sind, steht normal zur Mittelachse des Netzes und ist der sogenannte Hauptstrahl desselben. Da die Mittelebene nur zweifach unendlich viel Punkte, das Strahlennetz aber dreifach unendlich viele Regelscharen besitzt, so muß jeder Punkt der Mittelebene für eine einfach unendliche Zahl von Regelscharen als Mittelpunkt dienen.

Liegen drei der Kräfte in derselben Ebene, oder gehen sie durch denselben Punkt, oder lassen sich durch richtige Auswahl aus dem Strahlennetz der Kraftlinien diese Fälle ableiten, so wird das Zylindroid zu einem einfachen Strahlenbüschel von Achsen für reine Drehung.

Wenn die vier Auflagerkräfte derselben Ebene parallel sind, wenn also die eine Schnittlinie des Strahlennetzes der Kraftlinien ins Unendliche rückt, dann ist wieder eine fortschreitende Bewegung normal zu jener Ebene möglich, und alle Geraden dieser Richtung ebenso wie alle unendlich fernen Geraden sind Bewegungsachsen. Die zweite Schnittlinie liegt im allgemeinen im Endlichen, und das Strahlennetz kann durch zwei Paar sich schneidender Geraden bestimmt werden, deren Schnittpunkte auf der endlichen Schnittlinie liegen und deren Ebenen durch die unendlich ferne Schnittlinie hindurchgehen. Von diesen beiden Paaren gehört jedes einem einfachen Strahlenbüschel an, deren Strahlen von irgendwelchen Bewegungsachsen senkrecht geschnitten werden müssen. Das kann aber für beide Büschel gleichzeitig außer von den Achsen der fortschreitenden Bewegung, die zu den Ebenen normal gerichtet ist, nur von einem einzigen, die endliche Drehachse enthaltenden Parallelbüschel geschehen, und der von ihm getroffene Strahl in jedem Kraftlinienbüschel schließt mit der endlichen Drehachse einen rechten Winkel ein. Demnach ist in diesem Falle noch ein Büschel paralleler Achsen vorhanden.

Ist die endliche Drehachse normal zu den Ebenen gerichtet, welche die unendlich ferne Drehachse enthalten, schneiden also die vier Auflagerkräfte eine gegebene Gerade senkrecht, so geht das Parallelachsenbüschel in den Achsen für fortschreitende Bewegung mit auf, dafür gewinnt die senkrechte Schnittlinie die Bedeutung einer Achse für beliebige Bewegung. Wir können demnach sagen: vier Auflagerkräfte, welche eine Gerade senkrecht schneiden, lassen beliebige Bewegungen um diese Gerade als Achse zu, sonst aber keine. Soll zum Beispiel ein kreiszylindrischer Körper so unterstützt werden, daß seine Achse trotz zufälliger Verschiebungen eine genau vorgeschriebene Lage einnimmt, so muß er an vier Punkten seiner Oberfläche aufruhen (Bild 6, 7).

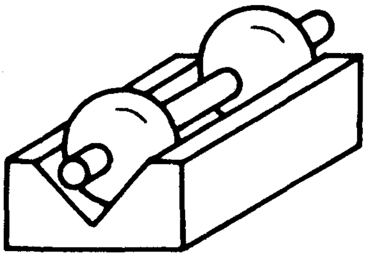

Bild 6:
Vier Auflagerkräfte, die eine Gerade senkrecht schneiden.

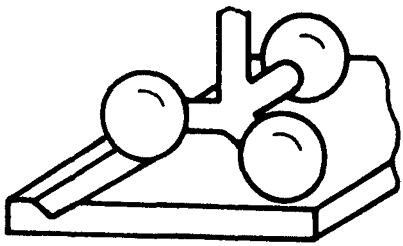

Bild 7:
Vier Auflagerkräfte, von denen zwei sich in einem Punkt und die beiden übrigen im Unendlichen schneiden.

Fünf Auflagerkräfte lassen nur eine einzige Bewegung zu, deren Achse die Hauptachse des von den fünf Kraftlinien bestimmten (Bild 8) linearen Komplexes ist. Ihr ist noch eine unendlich ferne Achse zugeordnet. Nur wenn die übrig bleibende Bewegung eine fortschreitende ist, wenn also die fünf Auflagerkräfte derselben Ebene parallel sind, erhält man mehr als zwei Achsen, nämlich das unendlich ferne Strahlenfeld und ein Strahlenbündel mit unendlich fernem Mittelpunkt

Eine sechste Auflagerkraft, welche dem linearen Komplex der übrigen fünf nicht angehört, macht jede Bewegung unmöglich und legt den Körper fest. Damit bei der Stützung eines Körpers durch zwei bis sechs Auflagerkräfte jede einen wirklichen Bei-

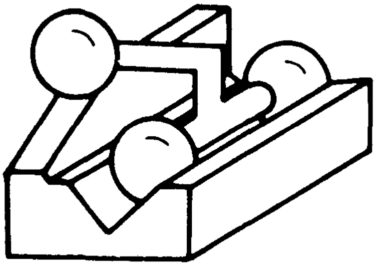

Bild 8:
Fünfpunktstützung von einem Freiheitsgrade.

trag zur Festlegung liefere, muß man beim Anbringen derselben gerade so verfahren, als wollte man auf auf dem kürzesten Wege einen linearen Komplex bestimmen. Die Regel dafür läßt sich für zwei bis fünf Auflagerkräfte in dem Satz zusammenfassen, daß die Gesamtheit von Geraden, welche n Kräfte schneidet ($n = 1, 2, 3, 4$), nicht auch die $n+1^{te}$ schneiden darf. Die sechste Auflagerkraft endlich darf dem linearen Komplex der übrigen fünf nicht angehören.

Zusammenstellung der Sätze von den übrigbleibenden Bewegungen eines Körpers, der in einigen Punkten seiner Oberfläche durch normale Stützen unterstützt wird:

I. Wenn sechs Punkte des Körpers auf sechs festen Flächen bleiben müssen, so ist im allgemeinen keine Bewegung dem Körper gestattet.

II. Wenn der Körper in fünf Punkten seiner Oberfläche durch fünf normale Stützen n_1, n_2, n_3, n_4 und n_5 untersützt wird, so bleibt ihm nur eine Schraubenbewegung übrig. Die Achse der Schraube schneidet senkrecht die Linien h und h′ der kürzesten Abstände zwischen den Transversalen 1, 2, 3 und 4, von denen die beiden ersten, d. h. 1 und 2, auf den Geraden n_1, n_2, n_3, n_4 und die beiden letzten auf den Geraden n_1, n_2, n_3, n_5 gelegen sind. Die beiden Paare Transversalen 1 und 2, 3 und 4 bestimmen zugleich die einzige mögliche Steigung der gedachten Schraube (Bild 9).

III. Wenn der Körper in vier Punkten durch vier Stützen n_1, n_2, n_3 und n_4 unterstützt wird, so bilden die Achsen der noch übrigbleibenden Schraubenbewegungen die Regelfläche eines Konoids K; alle Schraubenachsen schneiden sich nämlich unter einem rechten Winkel mit der Geraden h des kürzesten Abstandes zwischen den auf n_1, n_2, n_3, n_4 liegenden Transversalen 1 und 2 und ruhen noch auf einer Kurve σ, der Schnittkurve eines *runden* Zylinders C mit einem gewissen hyperbolischen Paraboloid P.
Die Ermittlung der beiden Transversalen (Leitlinien) in speziellen Lagen der vier Normalen n_1, n_2, n_3 und n_4 ist in Bildern angegeben (Bilder 10,11).

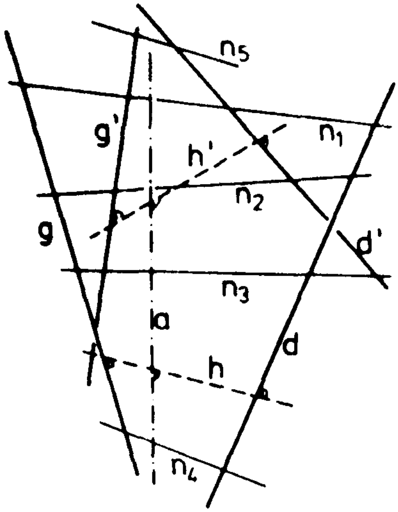

Bild 9:
n_1 *bis* n_5 *sind die Flächennormalen des gestützten Körpers.* h *und* h' *sind die kürzesten Abstände zwischen jeweils vier Normalen.* a *ist die kürzeste Abstandsgerade zwischen* h *und* h' *und infolgedessen die gesuchte Schraubachse.*

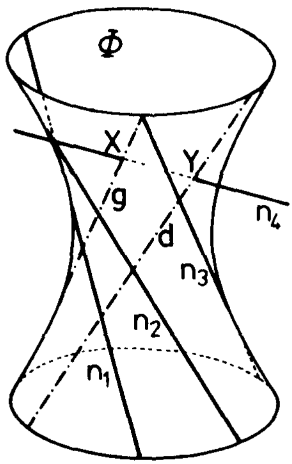

Bild 10:
Bestimmung der beiden Transversalen g *und* d *mit Hilfe des Hyperboloids* Φ *durch die drei Normalen* n, n_2 *und* n_3. *Das Hyberboloid* Φ *wird von der Normalen* n_4 *in zwei Punkten* X *und* Y *geschnitten. Die Erzeugenden von* Φ *durch* X *und* Y *sind die gesuchten Geraden* g *und* d.

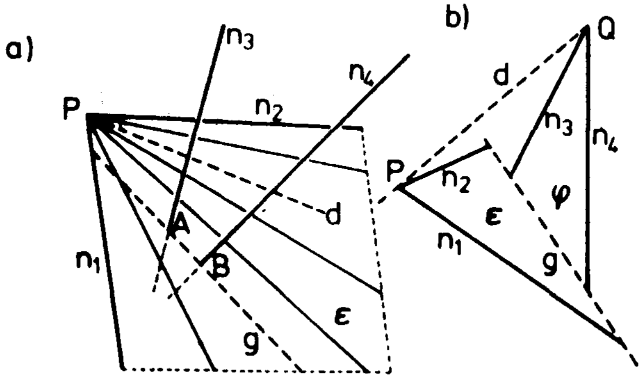

Bild 11:
Ermittlung der beiden Transversalen in speziellen Lagen der vier Normalen:
a) *zwei Normalen* n_1 *und* n_2 *schneiden sich in einem Punkt* P*;*
b) *zwei Normalen* n_1 *und* n_2 *schneiden sich in einem Punkt* P *und die beiden Normalen* n_3 *und* n_4 *schneiden sich in einem Punkt* Q. *Die Transversale* g *ist durch die Schnittgerade der Ebene* ε *und* φ *bestimmt;* ε *ist die Ebene durch die Normalen* n_1 *und* n_2, φ *ist die Ebene durch die Normalen* n_3 *und* n_4.

Die Gerade h dient als geometrische Achse des Zylinders C; der Radius des Zylinders ist gleich der Quadratwurzel aus dem Verhältnisse der kürzesten Entfernung der Geraden n_1 und n_2 zum Sinus des von den Geraden n_1 und n_2 gebildeten Winkels. Die auf der Linie h senkrecht stehenden Ebenen E schneiden sich mit dem hyperbolischen Paraboloid P in gleichseitigen Hyperbeln: die Asymptoten je einer Hyperbel halbieren die Nebenwinkel der Geraden n_1 und n_2, während die Konstante in der asymptotischen Gleichung der Hyperbel durch die Entfernung der Ebene E dieser Kurve von der Mitte des kürzesten Abstandes der Geraden n_1 und n_2 repräsentiert wird.

Jeder Erzeugenden des Konoids K entspricht eine bestimmte Größe der Steigung der Schraubenbewegung.

IV. Wenn der Körper durch drei normale Stützen n_1, n_2 und n_3 unterstützt wird, und wenn man die Schar α von denjenigen Erzeugenden des einschlägigen Hyperboloids, welche sich mit den Geraden n_1, n_2 und n_3 schneiden, konstruiert hat, so ergibt es sich, daß die Schraubenachsen der noch möglichen Bewegungen des Körpers eine unendliche Anzahl Konoide K bilden, von denen jedes auf zwei Erzeugenden der Schar α nach der Regel des Satzes III konstruiert ist (Bild 12).

V. Wenn der Körper durch zwei normale Stützen n_2 und n_2 unterstützt wird, und wenn man auf den Geraden n_1 und n_2 wie auf den Direktricen die Kongruenz von der ersten Ordnung konstruiert hat, so kann jedes Paar Geraden der Kongruenz als zwei konjugierte Rotationsachsen angesehen werden, und umgekehrt, jede übrigbleibende Bewegung des Körpers kann auf zwei gleichzeitige Drehungen um zwei Linien der Kongruenz zurückgeführt werden.

VI. Wenn der Körper durch eine normale Stütze n unterstützt wird, und wenn man sich einen sogenannten speziellen Komplex vom ersten Grade auf dieser Geraden n wie auf seiner Achse denkt (d.h. einen Komplex der Geraden, welche die a schneiden oder zu ihr parallel laufen), so werden durch alle möglichen Kombinationen der Linien des Komplexes zu je zwei alle diejenigen konjugierten Rotationsachsen erschöpft, mit welchen die noch übrigbleibenden Geschwindigkeiten des Körpers reproduziert werden können.

VII. Wenn der Körper frei ist, so kann man ihm alle möglichen Schraubenbewegungen zuweisen.

Man kann die Bestimmung der Schraubenachse eines zwangläufig geführten Körpers stets auf den Fall der fünf Flächennormalen zurückführen, indem z. B. die Kurvenführung als Schnittlinie zweier beliebigen Flächen ersetzt. Dadurch wird die Kurvenführung des Punktes durch zwei Normalen ersetzt (Bild 12, 13, 14, 15, 16).

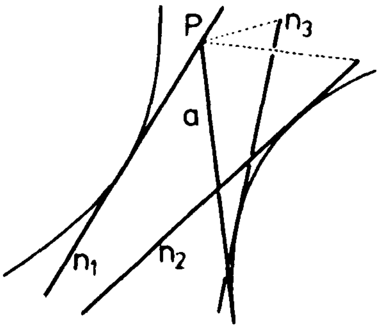

Bild 12:
Die Gesamtheit der Geraden a, *die die vorgeschriebenen drei Geraden* n_1, n_2, n_3 *treffen, bilden die Hauptgeraden eines einschaligen Hyperboloids.*

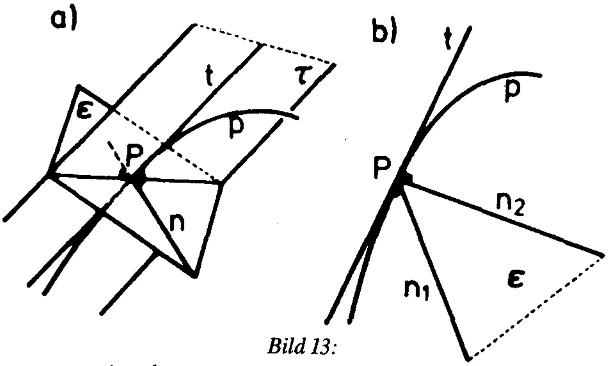

Bild 13:
Angabe einer Kurvenführung des Punktes P:
a) t *ist die Tangente an dem Punkt* P *der Kurve* p; *jede Ebene* τ *durch* t *ist eine Berührungsebene von* p *in* P. ε *ist die Normalebene der Kurve* p *in* P; n *eine Normale in dieser Ebene.*
b) *Die äquivalente Angabe der Punktführung durch zwei Bahnnormalen* n_1, n_2 *in der Normalebene* ε.

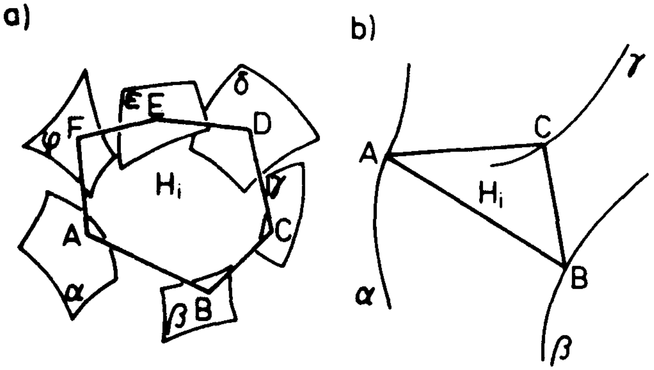

Bild 14:
Sechspunktführung eines starren Körpers H_i:
a) *Sechs Punkte* A, B, C, D, E, F *des Körpers* H_i *befinden sich jeweils auf Flächen* α, β, γ, δ, ε, φ. *Der Körper* H_i *hat den Freiheitsgrad* $f = 0$.
b) *Drei Punkte* A, C, B *des Körpers* H_i *jeweils längs der Kurven* α, β, γ *geführt. Der Körper hat den Freiheitsgrad* $f = 0$.

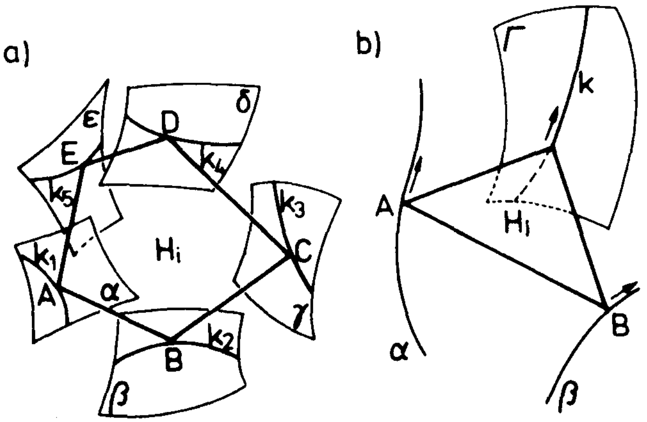

Bild 15:
Fünfpunktführung des Körpers H_i, *der Freiheitsgrad des Körpers ist* $f = 1$:
a) *Fünfpunktführung durch Flächenberührung;*
b) *Zweikurvenführungen und eine Flächenführung.*

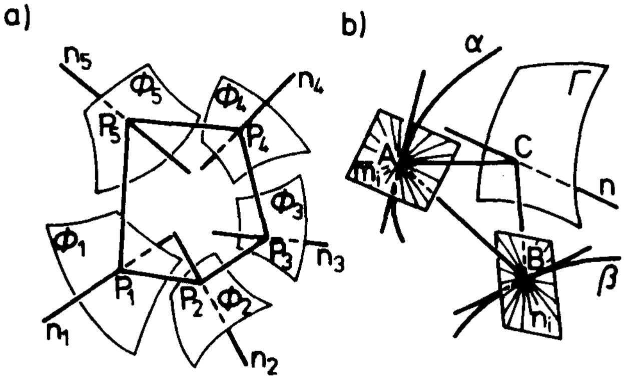

Bild 16:
Zurückführung von Fünfpunktführungen auf den Fall von Bild 9:
a) *Fünfpunktflächenführung durch die Angabe der Flächennormalen* n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 *auf den Fall von Bild 9 zurückgeführt.*
b) *Kurvenführungen werden jeweils durch zwei Normalen der Tangentialebene in* A *bzw.* B *ersetzt.*

Zusammensetzung zweier Drehungen um sich kreuzende Achsen [5]

Es sei $\overline{F_1F_2} = e$ (Bild 17) der kürzeste Abstand der sich unter dem Winkel α kreuzenden Achsen D_{12} und D_{23}, und es sei $\overline{OF_1} = e_1$, $\overline{OF_2} = e_2$, falls 0 ein zunächst beliebiger Punkt auf F_1F_2 ist. Durch 0 legen wir Parallelen OD'_{12} zu D_{12} bzw. OD'_{23} zu D_{23} und zerlegen die Drehung von K_1 um D_{12} in eine solche um D'_{12} mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit ω_{12} und eine Schiebung senkrecht zur Ebene der beiden Parallelen D_{12} und D'_{12} mit der Geschwindigkeit $v_{12} = e_1 \cdot \omega_{12}$. In gleicher Weise zerlegen wir die Drehung um D_{23} in eine solche um D'_{23} mit ω_{23} als Winkelgeschwindigkeit und eine Schiebung mit der Geschwindigkeit $v_{23} = e_2\omega_{23}$. Die Zusammensetzung der beiden Drehungen um die in 0 sich schneidenden Achsen D'_{12} und D'_{23} ergibt eine Drehung um die Achse D_{13} mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\bar{\omega}_{13} = \bar{\omega}_{12} + \bar{\omega}_{23},$$

die nach Größe und Richtung am kürzesten durch das Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeit gefunden wird. Um die beiden Schiebungen zusammenzusetzen, zerlegen wir sie zunächst je in zwei Schiebungen in Richtung von D_{13} und einer Senkrechten dazu. Die letzteren beiden Schiebungen erfolgen mit den Geschwindigkeiten $v_{12} \cos \alpha_1$ bzw. $v_{23} \cos \alpha_2$ (Bild 17) parallel derselben Geraden und ergeben sonach zusammengesetzt eine Schiebung senkrecht zu D_{13} mit der Geschwindigkeit

$$v'_{13} = v_{12} \cos \alpha_1 - v_{23} \cos \alpha_2 = e_1\omega_{12} \cos \alpha_1 - e_2\omega_{23} \cos \alpha_2.$$

Über die Lage des Punktes 0 verfügen wir nun so, daß $v'_{13} = 0$ wird, also der Beziehung

$$e_1\omega_{12} \cos \alpha_1 = e_2\omega_{23} \cos \alpha_2$$

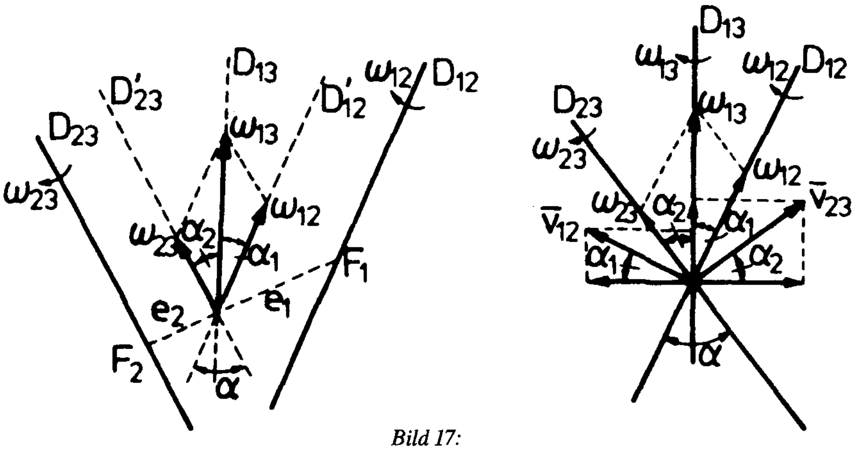

Bild 17:
Zusammensetzung zweier Drehungen um zwei windschiefe Achsen zu einer Schraubung.

genügt wird. Aus dieser und der weiteren

$$e_1 + e_2 = e$$

folgen dann die Werte

$$e_1 = \frac{\omega_{23} \cos \alpha_2}{\omega_{12} \cos \alpha_1 + \omega_{23} \cos \alpha_2} \cdot e, \quad e_2 = \frac{\omega_{12} \cos \alpha_1}{\omega_{12} \cos \alpha_1 + \omega_{23} \cos \alpha_2} \cdot e,$$

die sich auch mit Berücksichtigung der Beziehung $\omega_{13} = \omega_{12} \cos \alpha_1 + \omega_{23} \cos \alpha_2$ auf die Form

$$e_1 = \frac{\omega_{23}}{\omega_{13}^2} (\omega_{12} \cos \alpha + \omega_{23}) \cdot e, \quad e_2 = \frac{\omega_{12}}{\omega_{13}^2} (\omega_{12} + \omega_{23} \cos \alpha) \cdot e$$

bringen lassen. Die beiden Schiebungen senkrecht zu D_{13} heben sich folglich auf, und es bleiben nur noch die beiden Schiebungen in Richtung von D_{13}, die zusammengesetzt eine Schiebung mit der Geschwindigkeit

$$v_{13} = v_{12} \sin \alpha_1 + v_{23} \sin \alpha_2 = e_1 \omega_{12} \sin \alpha_1 + e_2 \omega_{23} \sin \alpha_2$$

ergeben; letztere läßt sich unter Benutzung für e_1 und e_2 einfacher in der Form

$$v_{12} = \frac{\omega_{13}\, \omega_{23}}{\omega_{13}} \cdot e \cdot \sin \alpha$$

schreiben. Das Hauptergebnis der vorstehenden Betrachtungen besteht folglich darin, daß die Zusammensetzung zweier Drehungen um sich kreuzende Achsen eine Elementarschraubung ergibt; die Schraubenachse schneidet den kürzesten Abstand der beiden Drehachsen rechtwinklig in einem Punkte, der von beiden Drehachsen die bestimmten Abstände e_1 und e_2 hat und deren Richtung durch die Diagonale des Parallelogramms der Winkelgeschwindigkeiten festgelegt wird. Die Winkelgeschwindigkeit ω_{13} und die Schiebungsgeschwindigkeit v_{13} der Schraubung haben die vorher ermittelten Werte.

Die Zerlegung einer Schraubung in zwei Drehungen um sich kreuzende Achsen ist unendlich vielfach möglich, nur müssen die beiden Drehachsen so gewählt werden, daß sie eine Senkrechte zur Schraubenachse rechtwinklig schneiden. Von den vier die Lage und Richtung der Drehachsen bestimmenden Größen $e_1, e_2, \alpha_1, \alpha_2$ sind nur zwei willkürlich wählbar, denn zwischen ihnen bestehen die beiden Beziehungen

$$e_1 = \frac{v_{13}}{\omega_{13}} \cdot \cot \alpha_2, \quad e_2 = \frac{v_{13}}{\omega_{13}} \cdot \cot \alpha_1.$$

Die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten der Drehungen sind zu berechnen.

Wie hieraus hervorgeht, kann man die eine der beiden Drehachsen bezüglich der Richtung und Lage ganz willkürlich wählen, z. B. D_{12}, denn dann ist e_1 der kürzeste Abstand der Achse D_{12} von der Schraubenachse S_{13} und α_1 der spitze Winkel zwischen S_{13} und D_{12}. Die andere Drehachse D_{23} dagegen wird durch Richtung und Lage von D_{12} völlig und eindeutig bestimmt; und außerdem muß D_{23} das gemeinsame Lot von S_{13} und D_{12} rechtwinklig schneiden. Die beiden Drehachsen D_{12} und D_{23} sind folglich einer Schraubung gegenüber einander zugeordnet und heißen deshalb konjugierte Achsen.

Man übersieht leicht, daß die Zusammensetzung zweier Schraubungen keine neue Art von Elementarbewegungen ergibt, sondern wieder nur eine Schraubung.

Der Ort der Momentanschraubachsen S_{31} auf der Normalen $(z_{12}\, z_{31})$ wird von den Parametern der gegebenen Momentanschraubachsen S_{12} und S_{23} bestimmt. Dazu gehören ω_{12}, ω_{23}, die Steigungen h_{12}, h_{23}, der Abstand $(z_{23}-z_{12})$ auf der Normalen und der Winkel Φ zwischen den Momentanschraubachsen S_{12} und S_{23} (Bild 18).

Diese Achsenfläche als Ort der S_{13} bei der allgemeinen räumlichen Relativbewegung dreier Körper wird bekanntlich als Zylindroid bezeichnet. Die Ausdehnung dieser Achsenfläche entlang der z-Achse (Normalen) und ihrer Sonderformen sind von den bereits genannten beschreibenden Parametern der gegebenen Momentanschraubachsen abhängig (Bild 18).

Die Achsen der Elementarschraubung, welche momentane Schraubenachse oder auch kurz Momentanachse genannt wird, ist für jede Elementarbewegung vollständig und eindeutig nach Richtung und Lage bestimmt. Während der Elementarbewegung des Körpers dreht sich also letzterer unendlich wenig um die Achse und verschiebt sich zugleich in ihrer Richtung.

Der Geschwindigkeitszustand der allgemeinen Elementarbewegung eines starren Körpers ist hiernach der folgende. Alle Punkte der Schraubenachse haben nur die Schiebungsgeschwindigkeit v_s in Richtung der Schraubenachse, während sich die Geschwindigkeit v_A eines beliebigen Körperpunktes A aus v_s und der Drehgeschwindigkeit w_A des Punktes zusammensetzt. Letztere steht senkrecht zur Ebene durch A und die Schraubenachse gleichsinnig mit der Winkelgeschwindigkeit ω der Drehung und von der Größe $r_A \cdot \omega$, falls r_A den Abstand des Punktes A von der Schraubenachse bezeichnet. Es wird sonach

$$v_A = \sqrt{v_s^2 + w_A^2} = \sqrt{v_s^2 + r_A^2 \omega^2} = \omega \cdot \sqrt{p^2 + r_A^2},$$

worin $p = v_s/p$ der Schraubenparameter genannt wird. Die Geschwindigkeit v_A berührt

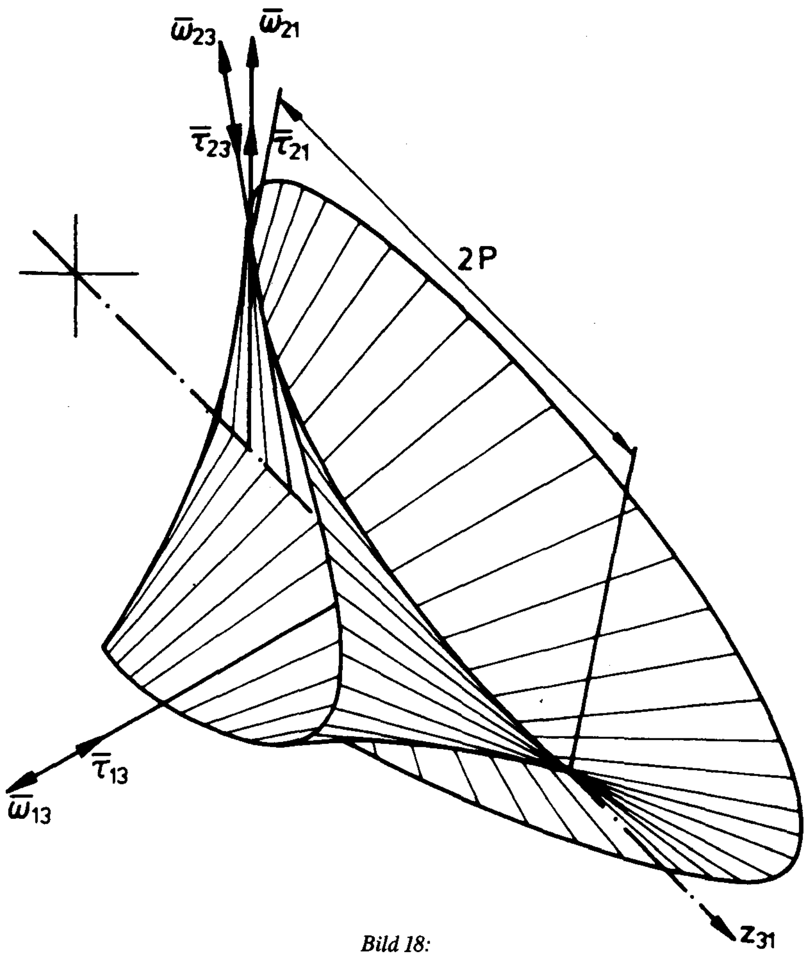

Bild 18:
Achsenfläche der momentanen Schraubenachsen bei allgemein räumlicher Relativbewegung dreier Glieder (Zylindroid). $\tau = h \cdot \omega$, *wobei* h *die Steigung der Schraubung bedeutet.*

den Kreiszylinder von Radius r_A um die Schraubenachse und schließt mit v_s bzw. der Mantellinie dieses Zylinders den Winkel δ_A ein, der durch die Beziehung

$$\tan \delta_A = \frac{w_A}{v_s} = \frac{r_A}{p}$$

bestimmt ist. Alle Punkte auf einer Parallelen zur Schraubenachse haben gleiche und gleichgerichtete Geschwindigkeiten, alle Punkte des vorerwähnten Kreiszylinders gleiche den Zylinder berührende Geschwindigkeiten (Bild 19).

Zerlegt man die Geschwindigkeiten der Punkte einer Geraden γ des Körpers in Komponenten in Richtung der Geraden und senkrecht zu ihr, so haben erstere alle die

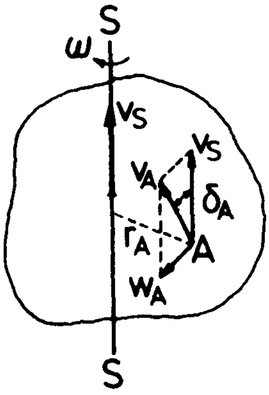

Bild 19:
Die Ermittlung der Geschwindigkeit des Punktes A *bei vorgeschriebener Schraubbewegung um die Achse* SS.

gleiche Größe. Diese gemeinschaftliche Komponente heißt die Gleitungsgeschwindigkeit der Geraden.

Da jede Elementarbewegung eines starren Körpers aus zwei Drehungen um sich kreuzende (konjugierte) Achsen zusammengesetzt werden kann und die Geschwindigkeit $\bar{v}_A$ eines jeden Körperpunktes A senkrecht zu der Ebene steht, welche durch A und die Achse der Drehung gelegt wird, so muß die Normalebene zu $\bar{v}_A$ durch A die konjugierte Drehachse zu jeder durch A gehenden Achse enthalten. Kennen wir die Geschwindigkeitsrichtung zweier Körperpunkte A und B, so finden wir folglich die zu AB konjugierte Drehachse als Schnittlinie der beiden Normalebenen zu $\bar{v}_A$ und $\bar{v}_B$ durch A bzw. B. Die Schraubenachse der Elementarbewegung des Körpers muß aber nach dem Früheren das gemeinsame Lot L_{AB} dieser beiden konjugierten Achsen unter rechtem Winkel schneiden. Diese Überlegung führt zu einer einfachen Bestimmung der Schraubenachse in dem Fall, in welchem wir die Richtungen der Geschwindigkeiten dreier Punkte A, B, C des Körpers kennen, die nicht in einer Geraden liegen. Denn bestimmen wir in gleicher Weise auch die konjugierte Achse zu AC, so schneidet die gesuchte Schraubenachse auch das gemeinsame Lot L_{AC} dieser beiden Achsen rechtwinklig; es ist sonach das gemeinsame Lot der beiden Lote L_{AB} und L_{AC} die gesuchte Achse der Elementarschraubung des Körpers.

Kennt man die Geschwindigkeiten $\bar{v}_A, \bar{v}_B, \bar{v}_C$ dreier Körperpunkte A, B, C der Richtung und der Größe nach, so findet sich die gesuchte Schraubenachse noch einfacher. Tragen wir nämlich die diesen drei Geschwindigkeiten entsprechenden Vektoren von einem beliebigen Punkte Q aus an und fällen von diesem Punkte das Lot $\overline{QF}$ auf das Dreieck $v_A v_B v_C$ der Endpunkte der Vektoren, so stellt dieses Lot nach Größe und Richtung die Schiebungsgeschwindigkeit $\bar{v}_s$ der Schiebung dar, während die drei Strecken $\overline{Fv_A}, \overline{Fv_B}, \overline{Fv_C}$ den Drehgeschwindigkeiten

$$w_A = r_A \cdot \omega, w_B = r_B \cdot \omega, w_C = r_C \cdot \omega$$

entsprechen. Denkt man sich letztere in A, B und C angetragen und errichtet zu ihnen senkrechte Ebenen in diesen Punkten, so schneiden sich diese in der Schraubenachse; damit wird letztere der Lage nach gefunden, während ihre Richtung schon durch das Lot $\overline{QF}$ bestimmt ist (Bild 20).

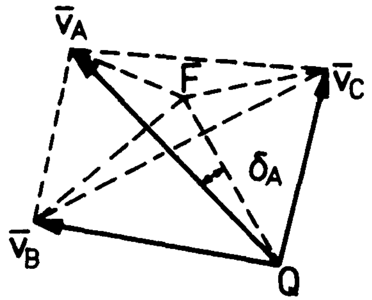

Bild 20:
Die Ermittlung der Richtung der Schraubenachse durch die Geschwindigkeiten dreier Punkte des Körpers.

Man kann jede Elementarbewegung aus Schiebungen längs und Drehungen um ruhende Achsen zusammensetzen, wie im folgenden gezeigt werden soll. Ein Körper K vollzieht eine beliebige Elemtarschraubung um eine Achse S gegen einen Bezugskörper, der durch das willkürlich gewählte Koordinatensystem XYZ (Bild 21) dargestellt werde. Die Schraubenachse schneide die XY-Ebene in dem Punkte S_0 und bilde mit den drei Achsen die Winkel $\delta_x, \delta_y, \delta_z$. Der Körper drehe sich um sie mit der Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ und habe die Schiebungsgeschwindigkeit $\bar{v}_s$. Wir zerlegen zunächst die Drehung um S in eine solche um die parallele Achse OD, welche durch den Koordinatenanfang 0 geht, und eine Schiebung senkrecht zur Ebene beider Achsen. Die letztere setzen wir mit der Schiebung längs der Schraubenachse zusammen, und die so erhaltene Schiebung zerlegen wir in drei Schiebungen längs der drei Koordinatenachsen. Ferner zerlegen wir die Drehung um OD mit ω in drei Drehungen um die Koordinatenachsen mit den Winkelgeschwindigkeiten

$$\omega_x = \omega \cos \delta_x,$$
$$\omega_y = \omega \cos \delta_y,$$
$$\omega_z = \omega \cos \delta_z.$$

Wir ersetzen sonach die Elementarbewegung des Körpers durch drei Schiebungen längs und drei Drehungen um die Achsen des gewählten Koordinatensystems, deren Geschwindigkeiten ganz bestimmte von $\bar{\omega}, \bar{v}_s$ und der Lage der Schraubenachse abhängige sind. Umgekehrt liefert die Zusammensetzung jener sechs Bewegungen eine eindeutig durch die sechs Geschwindigkeiten bestimmte Elementarschraubung um eine in ihrer Lage völlige bestimmte Achse. Jede andere Wahl der sechs Geschwindig-

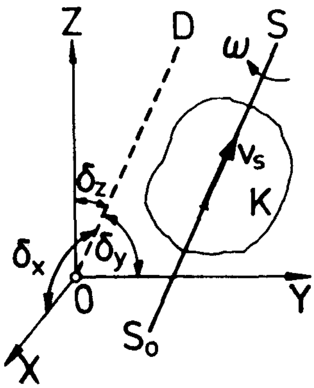

Bild 21:
Die Zerlegung der Schraubbewegung in Elementarbewegungen längs des festen Koordinatensystems X, Y, Z.

keiten liefert eine andere Schraubung. Daraus wird ersichtlich, daß zur Bestimmung einer Elementarbewegung des Körpers sechs Größen, nämlich die drei Schiebungsgeschwindigkeiten längs der und die drei Winkelgeschwindigkeiten der Drehungen um die Achsen eines willkürlichen Koordinatensystems gegeben werden müssen. Anders ausgedrückt heißt dies, daß zur Bestimmung einer Elementarbewegung sechs Größen willkürlich gewählt werden können. Man sagt daher, die freie Bewegung eines starren Körpers habe $f = 6$ Grade der Freiheit oder den Freiheitsgrad

$$f = 6.$$

Bei den nichtfreien oder gebundenen Bewegungen ist der Freiheitsgrad kleiner als 6, wie wir weiterhin zeigen wollen.

Die Forderung, daß mehrere einzelne Punkte des Körpers auf vorgeschriebenen Flächen sich bewegen, bzw. mehrere Berührungen der Oberfläche des bewegten Körpers mit der des ruhenden stattfinden sollen, hat eine weitere Beschränkung der Bewegungsfreiheit zur Folge. Bezeichnen wir die Anzahl dieser Punkte bzw. der Berührungen mit β, welche Zahl man den Grad des Zwanges nennt, so ist der Freiheitsgrad der Bewegung des Körpers

$$f = 6 - \beta,$$

da jede derartige einzelne Bedingung den Freiheitsgrad um 1 einschränkt. Vorausgesetzt ist hierbei nur, daß die Bewegungsbeschränkungen voneinander unabhängig sind. Der Grad des Zwanges β kann alle Werte von 0 bis 6 haben, und so lassen sich alle möglichen gebundenen Bewegungen starrer Körper dadurch herbeiführen, daß man eine gewisse Anzahl einzelner Punkte des Körpers zwingt, auf willkürlich zu wählenden Flächen sich zu bewegen, oder aber letztere in ebenso viel Punkten seiner Oberfläche zu berühren.

Ist z.B. $\beta=2$, also $f=4$, so erhält man eine Bewegung, bei der das Bohren ausgeschlossen sein muß, weil die beiden Berührungsnormalen im allgemeinen nicht in eine Gerade fallen. Dagegen kann der Körper eine rollende Bewegung ausführen, indem er sich um die Verbindungslinie der Berührungspunkte dauernd dreht, wie z.B. die Kugel in dem Laufkranz eines Kugellagers.

Wenn ferner $\beta \geq 3$, also $f \leq 3$ ist, so muß im allgemeinen sowohl Bohren als Rollen ausgeschlossen bleiben, weil die Flächennormalen in den geführten Punkten sich kreuzende Geraden sind.

In dem Falle $\beta=5$ wird $f=1$, d.h. die Bewegung des Körpers eine zwangläufige, also ganz bestimmte, bei der alle Körperpunkte ganz bestimmte Bahnen beschreiben. Auch in diesem Falle ist die Elementarbewegung des Körpers eine Schraubung, deren Achse und Schraubenparameter durch die Lage der geführten Punkte und der Flächen, auf denen letztere sich zu bewegen gezwungen sind, vollständig und eindeutig bestimmt werden. Die Ermittlung der Schraubenachse aus den fünf Normalen der Flächen in den Berührungspunkten wird im allgemeinen recht umständlich.

Vereinfacht wird sie aber, falls einzelne Punkte des Körpers auf gegebenen Kurven sich zu bewegen gezwungen sind. Da jede Kurve als Schnittlinie zweier Flächen aufgefaßt werden kann, so entspricht die Bedingung, daß ein Körperpunkt auf einer Kurve geführt wird, dem Zwangsgrad $\beta=2$, weil die Bewegung des Punktes an zwei Flächen gebunden ist. Wird sonach die Bewegung eines Körpers an die Bedingungen geknüpft, daß zwei Körperpunkte auf gegebenen Kurven sich bewegen müssen und ein dritter auf einer beliebigen Fläche, so erhält sie den Grad des Zwanges $\beta=2+2+1=5$, und folglich den Freiheitsgrad $f=6-\beta=1$. Da die Bewegung des Körpers sonach zwangläufig ist, so muß sich die Achse und der Parameter der Schraubung bestimmen lassen. Das kann auf folgendem Wege geschehen.

Es seien A und B die beiden, auf Kurven geführten Punkte, dann sind die Richtungen ihrer Geschwindigkeiten $\bar{v}_A$ und $\bar{v}_B$ die der Tangenten an die Kurven und folglich bekannt. Um auch die Richtung der Geschwindigkeit $\bar{v}_C$ des auf der Fläche geführten Punktes C zu finden, benutzen wir den Satz, daß die Gleitgeschwindigkeit einer Geraden für alle ihre Punkte dieselbe Größe hat und die senkrechte Komponente der Geschwindigkeit in Richtung der Geraden für jeden ihrer Punkte ist. Nehmen wir nun z.B. die Geschwindigkeit $\bar{v}_A$ der Größe nach willkürlich an, bzw. stellen sie durch eine willkürliche Strecke dar, so erhalten wir aus ihr sofort die Gleitgeschwindigkeiten der Geraden AB und AC. Mittels der von AB findet sich sofort die Größe der Geschwindigkeit $\bar{v}_B$, indem wir diese Gleitgeschwindigkeit in B antragen und in ihrem Endpunkte die zu AB senkrechte Ebene errichten; diese schneidet die Kurventangente des Punktes B im Endpunkte der Geschwindigkeit $\bar{v}_B$. Bestimmen wir dann die Gleitgeschwinkeit der Geraden $\overline{BC}$ aus $\bar{v}_B$, tragen diese ebenso wie die der Geraden $\overline{AC}$ in C an und errichten in den Endpunkten derselben die beiden Normalebenen, so schneiden sich diese in einer Geraden, welche den Endpunkt der Geschwindigkeit $\bar{v}_C$ enthalten muß. Letztere Geschwindigkeit liegt aber auch in der Tangentialebene der Fläche im Punkte C; es trifft sonach die letzterwähnte Schnittlinie die Tangentialebene im gesuchten Endpunkte der Geschwindigkeit $\bar{v}_C$. Da sich im vorliegenden Falle die Geschwindigkeiten dreier Körperpunkte bestimmen lassen, so können wir zur Ermittlung der Schraubennachse eines der beiden mitgelieferten Verfahren anwenden. Das zweite ist insofern vorteilhafter, als wir dabei auch sofort den Schraubenparameter mit erhalten.

Zwei Punkte P_1 und P_2 des Körpers werden festgehalten. Hier kann der Körper nur eine Drehung um die Verbindungslinie der beiden festgehaltenen Punkte ausführen. Alle Punkte dieser Verbindungslinie (der Drehachse) bleiben in Ruhe. Bei dieser Bewegung, der Drehung um eine ruhende Achse, beschreiben alle Körperpunkte bestimmte Kreise, deren Ebenen zur Drehachse senkrecht stehen und deren Mittelpunkte auf der Drehachse liegen. Der Freiheitsgrad ist hier $f=1$. Eine Bewegung, bei der $f=1$ ist, bei der also alle Körperpunkte gezwungen sind, sich auf eindeutig bestimmten Bahnen zu bewegen, nennt man zwangläufig.

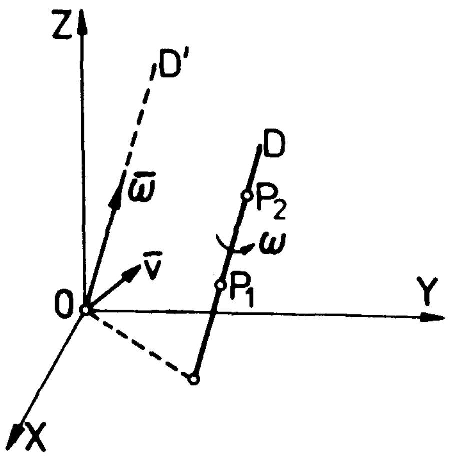

Bild 22:
Gebundene Bewegung des Körpers, wobei zwei Punkte des Körpers festgehalten werden.

Auch hier kann man die Drehung um die als gegeben anzunehmende Achse D zerlegen in eine Drehung um die parallele Achse D', die durch den Ursprung 0 eines beliebig gewählten rechtwinkligen Koordinatensystems geht, und in eine zur Ebene beider Drehachsen senkrechte Schiebung, deren Geschwindigkeit $\bar{v}$ die Größe $v=\omega e$ hat, wobei e den kürzesten Abstand der Drehachsen D und D' bedeutet (Bild 22). Dann kann man die Winkelgeschwindigkeit $\bar{v}$ der Drehung um D' und ebenso die Schiebungsgeschwindigkeit $\bar{v}$ in Komponenten in Richtung der drei Koordinatenachsen zerlegen, so daß man wieder sechs Größen erhält, die jedoch sämtlich von der gegebenen Winkelgeschwindigkeit ω der Drehung um die Achse D abhängen und durch sie eindeutig bestimmt sind. Wir erhalten also bei einem beliebig gewählten rechtwinkligen Koordinatensystem hier ebenfalls insgesamt sechs Bestimmungsgrößen wie bei der freien Bewegung, nur sind bei der gebundenen Bewegung diese sechs Größen nicht unabhängig voneinander. Insbesondere sind im Falle f = 1, d.h. bei der zwangläufigen Bewegung, durch eine einzige der sechs Größen alle anderen vollständig bestimmt.

Literatur

[1] Mannheim, A.: **Géométrie Cinématique.** Gauthier Villars, Paris 1894.
[2] Somoff, J.: **Kinematik.** Teubner, Leipzig 1878.
[3] Ball, R.S.: **The theory of screws.** Cambridge University Press, 1900.
[4] Sauer, R.: **Projektive Liniengeometrie.** Göschen Lehrbücherei, Berlin 1937.
[5] Dizioğlu, B.: **Getriebelehre,** Band 1, Grundlagen. Verlag Vieweg, Braunschweig 1965.
Hunt, K.H.: **Kinematic Geometry of Mechanisms.** Clarendon Press, Oxford 1978.